UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE

PAULA ROBERTA MENDES DE OLIVEIRA

FRACTAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE.

MOSSORÓ/RN
2020

PAULA ROBERTA MENDES DE OLIVEIRA

FRACTAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino – Posensino – Universidade do Estado do Rio Grande do Norte/ Universidade Federal do Semiárido/ Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial da obtenção de título de Mestre em Educação.

Orientadora: Dra. Márcia Maria Alves de Assis.

MOSSORÓ/RN
2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Biblioteca IFRN – Campus Mossoró

O48 Oliveira, Paula Roberta Mendes de.
Fractais na formação de professores: um estudo interdisciplinar no curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte / Paula Roberta Mendes de Oliveira. – Mossoró, RN, 2020.
90 f.

Dissertação (Mestrado em Ensino) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2020.
Orientadora: Dra. Márcia Maria Alves de Assis.

1. Geometria fractal. 2. Ensino de matemática. 3. Interdisciplinaridade – Educação. I. Título.

CDU: 514:37

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária
Viviane Monteiro da Silva CRB15/758

PAULA ROBERTA MENDES DE OLIVEIRA

FRACTAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UM ESTUDO INTERDISCIPLINAR NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino - POSENSINO – ampla associação entre a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN), Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA) e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFRN), em cumprimento às exigências legais como requisito parcial para a obtenção DO TÍTULO de Mestre em Ensino.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado e aprovado em 27/02/2020, pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

Márcia Maria Alves de Assis
____
Marcia Maria Alves de Assis, Dra. – Presidente
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

____
Marcelo Nunes Coelho, Dr. – Examinador interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Mariana de Brito Maia
____
Mariana de Brito Maia, Dra. – Examinadora externa
Universidade Federal Rural do Semiárido

Ao meu filho, Natan, com todo carinho!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, o maior orientador da minha vida. Ele nunca me abandonou nos momentos de necessidade.

Agradeço ao meu filho, Natan, pois foi por ele que eu persisti em chegar até aqui e continuarei seguindo.

Agradeço ao meu esposo, Nataniel, pela paciência e compreensão.

Agradeço a minha mãe, Maria de Lourdes, pelo amor e exemplo de mulher guerreira.

Agradeço ao meu pai, José Possineto, pelo amor, mesmo à distância.

Agradeço a minha querida avó, Alzira, minha segunda mãe.

Agradeço a minha irmã Lueny, por estar ao meu lado sempre que preciso.

Agradeço a todos os meus familiares e amigos, que sempre acreditaram em mim e no meu sucesso.

Agradeço a minha orientadora, Márcia Maria Alves de Assis, pela confiança depositada em mim e as valiosas orientações na condução dos estudos e da pesquisa.

Agradeço a todos os professores do Posensino que contribuíram com meu crescimento.

Agradeço aos meus colegas do Mestrado, em especial Eliziane, que dividiram comigo alegrias e tristezas.

Agradeço aos meus colegas de trabalho que estiveram comigo durante esta trajetória.

Enfim, a todas as pessoas que contribuíram com a realização de mais um sonho. Muito Obrigada!

Para a imaginação, um fractal é uma maneira de ver o infinito!

Gleick (1989, p. 94)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo compreender as potencialidades da Geometria Fractal como proposta didático-metodológica interdisciplinar na formação do professor de Matemática a partir de discussões com os alunos de Licenciatura em Matemática, futuros atores responsáveis também por esse processo. Para isso, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa exploratória com algumas características da pesquisa-ação com uma turma de alunos da disciplina Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Campus Central. Assim, trazemos como resultado, o olhar dos licenciandos sobre os materiais didáticos apresentados que tem como base a Geometria Fractal para o ensino de matemática, essa geometria que surgiu junto com a Teoria do Caos, algo novo, diferenciado para os licenciandos e intimamente ligada a interdisciplinaridade. Além disso, realizamos um estado do conhecimento sobre a abordagem dessa nova geometria, sua relação com a interdisciplinaridade e a formação do professor de matemática, em dissertações e teses do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes no período de 2005 a junho de 2017. Desta forma, concluímos que a proposta didático-metodológica apresentada possui um potencial desejável e que sua utilização poderá contribuir para facilitar o processo de ensino e aprendizagem em todos os níveis, desde que adequada a cada um deles, desde a Educação Básica ao Ensino Superior, apesar de ainda existir uma lacuna interdisciplinar, o que gera novos caminhos a serem percorridos por professores que gostam e estão sempre em busca de novas possibilidades para melhoria de sua prática em sala de aula.
Palavras-chave: Geometria fractal. Interdisciplinaridade. Ensino de Matemática. Aprendizagem.

ABSTRATC

This work aims to understand the potential of Fractal Geometry as a didactic-methodological interdisciplinary proposal in the formation of the Mathematics teacher from discussions with undergraduate students in Mathematics, that also will be the future actors responsible for this process. For this, we conducted an exploratory qualitative research with some characteristics of action research with a group of students from the discipline of Laboratory of Teaching-Learning Practice in Mathematics II of the 5th period of the Mathematics Degree course at the Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (Rio Grande do Norte State University), Central Campus. Thus, it brings, as a result, the view of the graduates on the presented didactic materials that is based on the Geometry Fractal for the teaching of mathematics, which was developed together with the Theory of Chaos, something new, differentiated for the graduates and intimately recommended to interdisciplinarity. In addition, we realized a state of knowledge about the approach of this new geometry, its relationship with interdisciplinarity and the formation of the mathematics teacher, dissertations and theses of the Catalog of theses and dissertations of the covers in the period from 2005 to June 2017. Then, we concluded that a didactic-methodological proposal offers a desirable potential and its use can contribute to facilitate the teaching and learning process at all levels, since it improves each of them, from Basic Education to Higher Education, although there are still interdisciplinary gaps, which generates new paths to be taken by teachers who like and are always looking for new possibilities to improve their practice in the classroom.
Keywords: Fractal geometry. Interdisciplinarity. High school. Mathematics teaching. Learn

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A escola tem como um dos seus propósitos fazer os estudantes desenvolverem algumas competências e habilidades essenciais para sua vida, o seu dia a dia, para o seu prosseguimento estudantil e desenvolvimento profissional. Essas habilidades devem ser desenvolvidas durante o ensino dos conteúdos das disciplinas que constituem o currículo de cada unidade escolar. Uma dessas disciplinas, a Matemática, é taxada por muitos alunos de difícil, e chata, muitas vezes, por acharem que muitos de seus conteúdos não têm utilidade.

Essa mesma disciplina, se destaca também pela quantidade de aulas a mais que outros componentes curriculares, por sua utilização em diversas outras disciplinas e por sua presença em diversas situações diárias, necessitando que os estudantes desenvolvam um bom raciocínio matemático, conheçam conceitos básicos, façam conjecturas, formulem explicações e que aprendam a utilizar algumas ferramentas indispensáveis à vida moderna.

Para avaliar se as escolas estão conseguindo alcançar esses objetivos e embasar as políticas que poderão ser implantadas, o Ministério da Educação (MEC) realiza, desde 1990, um conjunto de avaliações externas em larga escala, chamado Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Desde que foi criado, o SAEB já passou por algumas reestruturações. O último ano de sua aplicação com resultados divulgados foi 2017, quando o ensino médio foi oferecido em 28,6 mil escolas no Brasil, e foram realizadas, 7,9 milhões de matrículas. Neste ano, 71,7% dos estudantes dessa modalidade tiveram um desempenho insuficiente e apenas 4,5% tiveram resultado adequado, em Matemática (INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA, 2017).

O Brasil também participa do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) que é desenvolvido pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômicos (OCDE). As provas são aplicadas trienalmente, avaliando áreas diferentes a cada aplicação, gerando um ciclo. A última aplicação, que teve como foco a Matemática, foi realizada em 2012, obtendo nota 391 ocupando a 58ª posição entre os 65 países participantes da edição. Pela escala de proficiência do PISA, alunos com essa nota, estão no nível 1, conseguindo resolver apenas questões claras e que envolvem contextos conhecidos, identificam informações e conseguem realizar procedimentos rotineiros, realizar ações evidentes e dar continuidade imediata ao que foi estimulado (BRASIL, 2012).

Se observarmos os resultados de matemática em 2015 e 2018, anos em que o foco foram Ciências e Leitura, respectivamente, podemos perceber uma pequena melhora de um ano para outro, visto que, em 2015 o Brasil atingiu uma média de 377 pontos e em 2018, 384 pontos como divulgado no relatório preliminar, mas esses resultados são piores que o de 2012 onde o foco era matemática. Nesse relatório observamos ainda que 68,1% dos alunos que realizaram a prova encontra-se no nível 1 ou abaixo dele, uma situação muito indesejada, visto que, o nível 2 é o nível básico de proficiência para que um jovem possa usufruir plenamente das oportunidades e da vida moderna sem dificuldades, segundo a OCDE (BRASIL, 2019, p. 108).

Observando esses resultados percebemos como o processo de ensino e aprendizagem de Matemática requer reflexões, discussões e ações que possam realmente fazer com que alcancemos os objetivos esperados. Essas inquietações fazem parte da minha prática diária em sala de aula. Juntamente com esses resultados, diversos pensamentos e dúvidas surgem no sentido, principalmente, de buscar formas de melhorar a minha prática e fazer os meus alunos atingirem os objetivos desejados.

Nesse cenário, esta pesquisa traz discussões sobre esse tema utilizando-se da Geometria Fractal como base para atividades interdisciplinares em sala de aula, a partir da reflexão de futuros professores do curso de licenciatura em Matemática, como possibilidade de facilitar o processo de ensino e aprendizagem e nos ajudando no desenvolvimento de práticas futuras, o que pode contribuir para melhoria dos resultados acima citados.

A Geometria Fractal surgiu com a Teoria do Caos, quando meteorologistas, biólogos, fisiologistas, médicos e cientistas de outras áreas tentavam encontrar explicações para certos temas, como a variação populacional, oscilações das batidas do coração, contorno das nuvens, da costa das montanhas, ramificações alveolares e diversos outros acontecimentos e formatos de objetos que eram e ainda são comuns no cotidiano (GLEICK, 1989, p. 4), mas que eram intrigantes. Em suas buscas, muitos perceberam que a resposta estava em aspectos regulares presentes na irregularidade desses acontecimentos ou da rugosidade de seu contorno, ou seja, a presença da ordem no caos.

Essa geometria possui uma estrutura que a diferencia da Geometria Euclidiana abordada em sala de aula, mas que a utiliza em vários de seus objetos. Estes, chamados de fractais, chamam a atenção de muitas pessoas por meio do belo visual ou da autossemelhança de suas partes. Uma estrutura que gera uma matemática atraente, com objetos muito interessantes, que podem ser usados como suporte para a aprendizagem de alguns conteúdos.

O nome *Fractal*, vem do Latim, e foi usado pela primeira vez por Benoit Mandelbrot em 1975 (BARBOSA, 2005, p. 9). Porém, objetos com as características do tipo fractal já haviam aparecido décadas antes, quando alguns cientistas, realizando processos iterativos, criaram fractais artificiais. Esse nome passou, então, a ser usado para delinear, calcular e refletir sobre as formas rugosas, irregulares, fragmentadas da natureza ou de objetos construídos pelo homem por processos iterativos.

Os objetos ditos fractais possuem algumas características que aparecem na maioria das tentativas em definí-los: a autossemelhança, a dimensão fracionada e a complexidade que aparece devido ao processo iterativo. Assim, podemos dizer que um Fractal é um objeto, ou conjunto de objetos complexos, geométricos ou naturais, que possui partes semelhantes ao todo, só que em escala menor.

Atualmente essa geometria está sendo aplicada de forma muito variada, assim como foi o seu surgimento, na engenharia elétrica, para fabricar antenas; na computação gráfica, para criação de imagens artificiais de nuvens e montanhas; na medicina, em análise de imagens de células cancerígenas; na arquitetura, para construção de paisagens de grande impacto visual; esses são apenas alguns exemplos (BALDOVINOTTI, 2011, p. 28).

Desta forma, este trabalho traz alguns resultados do uso da Geometria Fractal como proposta didático-metodológica interdisciplinar, visto que seus objetos possuem um convite visual e muitos deles podem ser gerados por computador e/ou por materiais manipuláveis, suscitando uma gama de possibilidades de utilização, e ainda, reflexões de futuros professores do curso de licenciatura em Matemática sobre suas potencialidades.

Temas que muitas vezes são estudados em sala de aula de forma tradicional, somente com o repasse teórico de fórmulas e resoluções de exemplos e exercícios, podem ser desenvolvidos com o uso dessa geometria juntamente com a criatividade do professor. Além disso, por ter surgido a partir da necessidade de várias áreas do conhecimento e hoje, ser utilizada assim também, a Geometria Fractal traz a possibilidade de realizarmos uma prática interdisciplinar, na perspectiva de religar algumas disciplinas em atividades escolares, tendo essa geometria como objeto de estudo principal.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM+) já traziam essa perspectiva indicando que "em suma, há que se compreender e trabalhar convergências e divergências, reais ou aparentes, determinar e desenvolver temáticas e métodos comuns e, com esse conhecimento, preparar o trabalho de cada disciplina e de seu conjunto" (BRASIL, 2002, p. 19). Uma visão interdisciplinar que não descarta o trabalho disciplinar, mas que reforça a importância do estudo em conjunto das disciplinas, de seus elementos, que as torna singulares e ao mesmo tempo, daqueles termos semelhantes, que podem ser tratados perpassando pelos significados das demais disciplinas.

E continua recomendando que "essa articulação interdisciplinar intra-área não deveria ser vista simplesmente como um produto novo, a ser apresentado à escola, pois, sob certos aspectos, é uma dívida antiga que se tem com o aluno" (BRASIL, 2000, p.19). Assim, escola e professor precisam criar, identificar, analisar, fazer e desfazer atividades, projetos, estudos, formações, que possibilitem o pagamento dessa dívida.

Desta forma, como a ideia principal é usar a Geometria Fractal como recurso didático para sala de aula da Educação Básica, nada melhor do que apresentá-la e discuti-la com futuros professores. Deste modo, a nossa pesquisa tem aplicação em uma turma de licenciandos em Matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN), na disciplina Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II.

A escolha pela UERN se deu por esta possuir o curso de Licenciatura em Matemática, e por fazer parte do Programa de Pós-graduação ao qual este trabalho se apresenta, e a escolha da disciplina, Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II, se deu por possibilitar ao licenciando refletir sobre sua prática e buscar formas de incrementá-la em sala de aula, como a ementa nos mostra:

> Apresentação de diversos métodos (resolução de problemas, uso da história da matemática, uso de materiais didáticos e recursos tecnológicos, modelagem matemática, dentre outros) para o ensino de Matemática com vistas ao planejamento de unidades didáticas. Etnomatemática. Implementação por meio de aulas simuladas das aulas preparadas. Análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental. (UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE, 2006)

Uma disciplina que possibilita conhecer e discutir sobre os diferentes métodos para o ensino de Matemática e nos ajuda a responder aos seguintes questionamentos que percorrem o nosso trabalho: Que contribuições a Geometria Fractal pode trazer para a formação de alunos de Licenciatura em Matemática? Como a Geometria Fractal pode ser abordada no Ensino Médio de forma interdisciplinar? Qual a opinião dos licenciandos sobre as propostas de abordagem apresentadas e se, para eles, elas podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem? Para isso, realizamos oficinas e apresentamos roteiros de atividades que foram discutidos com os alunos do curso de licenciatura, explorando a Geometria Fractal de forma interdisciplinar, de modo a verificar as possibilidades e potencialidades didático-metodológicas desse recurso.

Buscamos como **objetivo geral**, compreender as potencialidades da Geometria Fractal como proposta didático-metodológica interdisciplinar na formação do professor de Matemática da UERN na disciplina Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática.

E como **objetivos específicos**: 1) constituir um panorama das pesquisas brasileiras, em níveis de mestrado e doutorado, que abordam a Geometria Fractal como estratégia de ensino na formação de professores de matemática; 2) desenvolver oficinas e roteiros de atividades explorando a Geometria Fractal com os futuros professores e 3) observar e apontar as potencialidades do uso da Geometria Fractal, em uma perspectiva interdisciplinar, na formação de professores de matemática.

Dessa forma o nosso trabalho está composto por essa Introdução, onde discorremos sobre alguns dados das principais avaliações externas, SAEB e PISA, realizadas nas escolas públicas relacionados ao ensino de Matemática, além de discorrer sobre os nossos propósitos de pesquisa, os questionamentos, os objetivos, a metodologia utilizada, o local de aplicação e outras informações.

Compondo nosso segundo capítulo, temos a Fundamentação Teórica, trazendo a relação entre a interdisciplinaridade, a Geometria Fractal e a formação do professor de Matemática, buscando definir a interdisciplinaridade, apoiando-nos nas definições e concepções de Japiassu (1976), Alvarenga *et al.* (2015), Morin (2007), Fazenda (2011, 2008), Brasil (2000) entre outros, na busca de entendê-la, numa perspectiva de religação dos conhecimentos especializados sem esquecer o particular de cada disciplina, mas buscando a contribuição ou o olhar delas na construção do conhecimento mais complexo. Como forma de relacionar a interdisciplinaridade com a Geometria Fractal, fizemos um recorte histórico do surgimento desta, bebendo em Eves (2011) e Gleick (1989), além de buscarmos sua definição e suas características em Mandelbrot (1977), Gleick (1989), Barbosa (2005) entre outros. Traremos ainda, uma discussão sobre a formação do professor na atualidade, buscando identificar os principais pressupostos defendidos pelos autores para que tenhamos uma formação que possibilite como consequência, uma aprendizagem integral do aluno. Assim, nos apoiamos nas discussões de D'Ambrósio (2000), Cortez (2012), Pimenta (2006), Zeichner (2003).

No capítulo 3, constituímos um panorama das pesquisas brasileiras, que abordam a Geometria Fractal como estratégia de ensino na formação de professores de matemática, em níveis de mestrado e doutorado, como forma de alcançar o segundo objetivo do nosso trabalho, com trabalhos de 2005 a 2017, tendo como base o Catálogo de teses e dissertações da Capes.

Na sequência, trazemos um delineamento da metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa, configurando nosso capítulo 4, com uma discussão sobre as bases da metodologia escolhida em autores como Gil (2002), Moreira (2016), Bogdan e Biklen (1994), Thiollent (2011) entre outros.

No capítulo 5 fazemos a análise dos dados adquiridos durante o desenvolvimento da pesquisa, utilizando-se de algumas técnicas da análise de conteúdos de Bardin (1977), como a categorização, também presente nos capítulos 2 e 3 de maneira mais superficial, refletindo sobre os passos que não deram certo, as etapas que mais nos fizeram obter e concretizar nossos conhecimentos e, verificar se obtivemos êxito na empreitada da pesquisa. Para concluir, temos as considerações finais, onde relacionamos os resultados encontrados às nossas perspectivas e ao referencial teórico em que nos baseamos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os resultados das provas externas anteriormente citados refletem parte dos problemas no processo de ensino e aprendizagem que vão além das nossas salas de aula. Não buscamos aqui, determinar os culpados ou os motivos para que esses resultados assim estejam, mas buscar, como professores do ensino básico, alternativas de tentar melhorar esse processo. Este trabalho procura discutir com futuros professores de matemática sobre alguns materiais didáticos que possam facilitar aprendizagem dos alunos. Para isso, começaremos nossa fundamentação com algumas descobertas e criações do homem até chegar aos objetos que nos interessam: os fractais. E na sequência, a relação entre esses objetos, a formação de professores de matemática e a interdisciplinaridade.

2.1 DA ORDEM AO CAOS

2.1.1 Na antiguidade

A busca por compreender o meio onde vive, os fenômenos naturais e a vida como um todo, acompanha o homem desde o tempo das cavernas. Como sabemos, os primeiros povos viviam da caça de pequenos animais selvagens, da pesca e das frutas e raízes que colhiam, eram nômades, mudando-se constantemente em busca de alimento e em resposta as mudanças climáticas. Tinham instrumentos feitos de pedra, madeira, ossos e carapaças de animais que eram utilizados para a caça e para a preparação dos alimentos. Com o tempo, dominaram o fogo e desenvolveram o conceito de número e o processo de contagem.

Após observarem a natureza, passaram a praticar a agricultura, domesticaram os animais, deixando de ser nômades. Desenvolveram a capacidade de ler e escrever, planejaram barragens, sistemas de irrigação, aprenderam a forjar o bronze e o ferro, desenvolveram uma matemática agrária e comercial e uma geometria, mesmo que de forma empírica. Passaram a cobrar impostos, o que exigia medidas precisas dos terrenos e de suas extensões, representando grande evolução científica e social (EVES, 2011, p. 57).

Mais tarde, filósofos e matemáticos, passaram a compreender o mundo como um lugar regido pela ordem, ao qual davam o nome de Cosmos. Desenvolveram então, uma geometria demonstrativa, baseada nessa ordem, inicialmente através de Tales de Mileto, depois dele, podemos citar: Pitágoras, com seu famoso teorema e a descoberta das grandezas incomensuráveis, Platão, Eudoxo, Arquimedes, Aristóteles, entre outros. Nessa época os Três Famosos Problemas, a saber, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, foram o grande estímulo à ampliação das descobertas matemáticas, em especial, na área da geometria.

> O grande estímulo ao desenvolvimento da matemática, inclusive para a criação de novas teorias, dado pelos esforços continuados para se resolverem os três famosos problemas da Antiguidade, ilustra o valor heurístico de problemas matemáticos atraentes não resolvidos. (EVES, 2011, p. 134)

Com as descobertas nessa área, criava-se uma Geometria denominada Euclidiana em homenagem a Euclides[1], o maior colaborador para a sua estruturação, que passou sua vida desenvolvendo estudos e organizando-os de um modo sistemático. Representando, assim, a primeira concepção da Geometria como conjunto sistematizado e lógico de propriedades, os quais servem de base não só para a matemática, mas para as outras Ciências e seus diversos ramos. Surgiu então a Geometria, que, segundo Gleick (1989), melhor representou e descreveu, até pouco tempo atrás, os conceitos do mundo em que vivemos:

> As formas da geometria clássica são as linhas e os planos, os círculos e as esferas, os triângulos e os cones. Representam uma poderosa abstração da realidade, e inspiram uma vigorosa filosofia de harmonia platônica. Euclides fez delas uma geometria que durou dois milênios, a única geometria conhecida da maioria das pessoas, até hoje. (GLEICK, 1989, p. 89)

Essa geometria, também é conhecida como Geometria Plana, é uma área da Matemática que estuda as formas, através de conceitos primitivos, os quais, não possuem definição, pois estão incutidos em nossa mente de forma natural, e por meio de uma notação e de uma representação gráfica de símbolos, exprimimos a ideia que temos de cada um deles: o ponto, a reta e o plano.

Mesmo sem definição, as propriedades e proposições sobre o ponto, a reta e o plano proporcionam conhecer e auxiliar na compreensão de formas concretas, possibilitando construir conceitos matemáticos relacionados a tal área do conhecimento que ajudam a resolver problemas cotidianos e a compreender parte do mundo que nos rodeia.

Mas, mesmo resolvendo diversos problemas do dia-a-dia, essa geometria não achava respostas para explicar vários fenômenos naturais, como por exemplo, as formas das nuvens, dos relâmpagos e os percursos de água de um rio. Tais respostas começaram a ser encontradas com o surgimento de uma nova geometria, a Geometria Fractal, que está intimamente ligada ao surgimento de uma nova Ciência chamada Caos.

A Ciência do Caos tem ligações com disciplinas tradicionais. Ela une acontecimentos de descontrole e irregularidade que inicialmente parecem não possuir alguma relação: da

[1] Matemático e filósofo grego, que viveu no Séc. III a.C, autor de “Os Elementos”.

turbulência do tempo até a variação no crescimento de uma população, do desenho dos flocos de neve até os redemoinhos de fumaça que se espalham com os ventos. Apesar das inquietações surgirem e normalmente ficarem em ambientes científicos, o caos é uma ciência do mundo cotidiano, formulando indagações que muitas vezes nos fizemos: sobre as palpitações do coração, sobre a maneira pela qual os rios formam seus braços, como ocorre o crescimento dos galhos ou das raízes de uma árvore.

2.1.2 Na atualidade

O surgimento da Teoria do Caos deu-se a pequenos passos, sendo o matemático francês, Julis Henri Poincaré[2], o seu precursor, quando respondeu a um problema proposto pelo Rei Oscar Simmond da Suécia, em 1887, o qual premiava quem o solucionasse. Eis o problema: Seria o Sistema Solar estável? Poincaré respondeu que sim, que os planetas giravam ao redor do sol obedecendo uma ordem. Porém, após entregar sua resolução, percebeu que, da maneira como foi respondido, o Sistema Solar não seria estável e que o pequeno erro que havia cometido gerava uma modificação na posição dos planetas, o que levaria a um resultado caótico. (BEVILAQUA, 2015, p. 300)

Foi dele a noção de que uma pequena causa pode levar a grandes efeitos, uma advertência feita na passagem do século e que foi praticamente esquecida, mas que serve hoje como um dos princípios para base dessa nova teoria. Com o tempo, o enunciado ficou conhecido como Efeito Borboleta, ou seja, a "noção de que uma borboleta, agitando o ar hoje em Pequim pode modificar no mês seguinte sistemas de tempestades em Nova York" (GLEICK, 1989, p. 8). Posteriormente, esse efeito recebeu um nome técnico, “dependência sensível das condições iniciais” (GLEICK, 1989, p. 8), e foi o ponto de partida para os investigadores do caos:

> Quando os investigadores do caos começaram a pensar na genealogia de sua nova ciência, encontraram muitas trilhas intelectuais do passado. Uma, porém, se destacava claramente. Para os jovens físicos e matemáticos que lideravam a revolução, um dos pontos de partida foi o Efeito Borboleta. (GLEICK, 1989, p. 8).

Um deles foi o meteorologista americano Edward Lorenz[3]. Ele descobriu que, uma pequena mudança no clima hoje, pode gerar grandes catástrofes no futuro, ao tentar fazer uma previsão meteorológica utilizando um computador onde, com base em certas informações

---

[2] Nasceu e morreu na França (1854 -1912), se ocupou no estudo dos sistemas dinâmicos, da geometria não-euclidiana, teoria de funções, topologia entre outras.
[3] Nasceu em West Haven (1917) e morreu em Cambrige (2008), foi meteorologista e matemático.

fornecidas à máquina na forma de números, previa o tempo para os dias e meses seguintes na forma de gráficos. Em um certo dia, no inverno de 1961, Lorenz pretendia que o computador repetisse uma sequência de gráficos já impressos e tomou um atalho. O computador imprimiu gráficos diferentes. De início ele pensou ser um defeito da máquina, uma válvula queimada. Mas, logo observou que, os dois gráficos, divergiam progressivamente a partir de um certo ponto, o que levou a conclusão que pequenas diferenças se multiplicam, formando um efeito cascata. Que pequenos erros se acumulam com o tempo, pois na primeira vez, o computador trabalhou com números de seis casas decimais e na segunda, ele digitou números mais curtos, apenas com três casas decimais, conjecturando que a diferença era desprezível.

Depois desses precursores, outros cientistas passaram a estudar acontecimentos que eram comuns no cotidiano, mas que eram intrigantes. Meteorologistas, matemáticos, biólogos, geômetras, médicos, físicos, cientistas de diversas áreas buscavam respostas a temas como a variação populacional, oscilações nos batimentos do coração, a turbulência que ocorriam nos fluidos, como se ocorriam as ramificações alveolares. Segundo Gleick (1989), esses cientistas tentavam responder essas perguntas em áreas diferentes que levavam a uma mesma resposta: o caos.

> Quando Michel Feigenbaum começou a refletir sobre o caos em Los Alamos (1974), era apenas um entre um punhado de cientistas dispersos, que em sua maioria não se conheciam. Um matemático em Berkeley, Califórnia tinha organizado um pequeno grupo dedicado à criação de um novo estudo dos “sistemas dinâmicos”. Um biólogo que se ocupava das populações, na Universidade de Princeton, estava em via de divulgar um apelo a todos os cientistas para que examinassem o comportamento aparentemente complexo de alguns modelos simples. Um geômetra da IBM buscava uma nova palavra para descrever uma família de formas – dentadas, emaranhadas, estilhaçadas, enroscadas, fragmentadas – que considerava como um princípio organizador da natureza. Um físico matemático francês tinha acabado fazer a controversa afirmação de que a turbulência dos fluidos poderia ter alguma relação com uma bizarra e infinitamente complexa abstração que ele chamava de atrator estranho (GLEICK, 1989, p. 4).

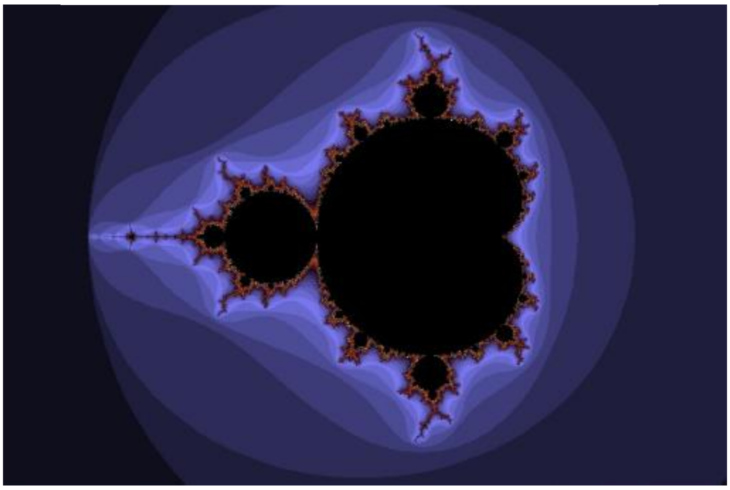
Como podemos perceber, essa nova Ciência veio nascer e se desenvolver nas últimas quatro ou cinco décadas, principalmente pelo rápido aperfeiçoamento das técnicas computacionais e a partir das tentativas de se explicar os fenômenos que ainda não se encaixavam em nenhuma teoria até então desenvolvida. Gleick (1989) nos mostra que após essa descoberta podemos ver o caos em todo lugar:

> agora que a ciência está atenta, o caos parece está por toda parte. Uma coluna ascendente de fumaça de cigarro se decompõe em anéis desordenados. Uma bandeira drapeja de um lado par o outro ao vento. Uma torneira gotejante passa de um ritmo constante para outro, aleatório. O caos surge no comportamento das condições do tempo, no comportamento de um avião em vôo [...] (GLEICK, 1989, p. 4)

Notamos também as diferentes áreas, como a biologia, a meteorologia, a medicina, que estudavam o caos, mesmo sem saber que relações elas tinham em comum, ligando-as por respostas que chegavam a um mesmo lugar, "essa ciência trouxe consigo o ver ordem e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico. Entretanto, nota-se que o Caos colocou elos entre temas não relacionados, justamente pelas irregularidades" (BARBOSA, 2005, p. 10). Como podemos perceber, algo um tanto interdisciplinar.

Com essa nova Ciência, uma nova Geometria também nasceu, a Geometria Fractal, geometria que estuda os Fractais, nome dado aos "entes precursores", em 1975, pelo matemático Benoit Mandelbrot[4], que vem da palavra *fractus*, do latim, que significa quebrar. Ele buscava uma nova palavra para descrever uma família de formas, para muitos estranhas, sendo o primeiro a plotar um fractal em computador apresentando o traçado detalhado do gráfico de um conjunto cujo parâmetro era um sistema dinâmico no campo complexo, hoje conhecido como o Conjunto de Mandelbrot.

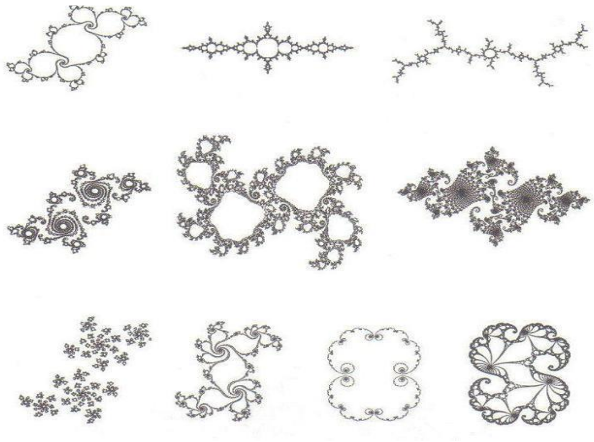
Figura 1 - O conjunto de Mandelbrot



Fonte: Produzida pela autora[5].

[4] Nasceu na Polônia (1924) e morreu em Cambridge (2010), Massachusetts, desenvolveu vários estudos sobre fractais, sendo conhecido como "pai da Geometria Fractal".
[5] Produzida através do software XaoS.

Figura 2 - Conjunto de Julia



Fonte: Medina (2011).

O Conjunto de Mandelbrot começou a aparecer quando Mandelbrot tentou encontrar uma maneira de generalizar uma classe de formas, os Conjuntos de Julia, desenvolvidos durante a Primeira Guerra Mundial pelos matemáticos franceses Gaston Julia[6] e Pierre Fatou[7], que trabalhavam sem a ajuda de computadores e que até então estavam esquecidos. A partir deles e das características observadas em outros monstros matemáticos, como eram conhecidas essas formas, podemos chegar a um conceito para o que é um fractal, chegar a uma definição, ou a forma de como identificá-los.

2.2 A DEFINIÇÃO DE FRACTAL

Vários autores destacam que o termo fractal vem do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere* em Latim. Mandelbrot (1977) traz, em seu livro, a primeira definição de fractal que, para muitos, não esclarece e nem traz uma visão palpável do que seria um fractal. Traduzindo suas palavras, um fractal "é um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica." (MANDELBROT, 1977, p. 15). Geometricamente a topologia pode ser considerada como o estudo das propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob as chamadas transformações topológicas, isto é, sob aplicações contínuas que tem inversas também contínuas, aplicações com essas características são chamadas homeomorfas. A dimensão topológica, assim como a euclidiana, é necessariamente uma quantidade inteira, diferenciando-se da dimensão fractal que pode ser fracionada.

---

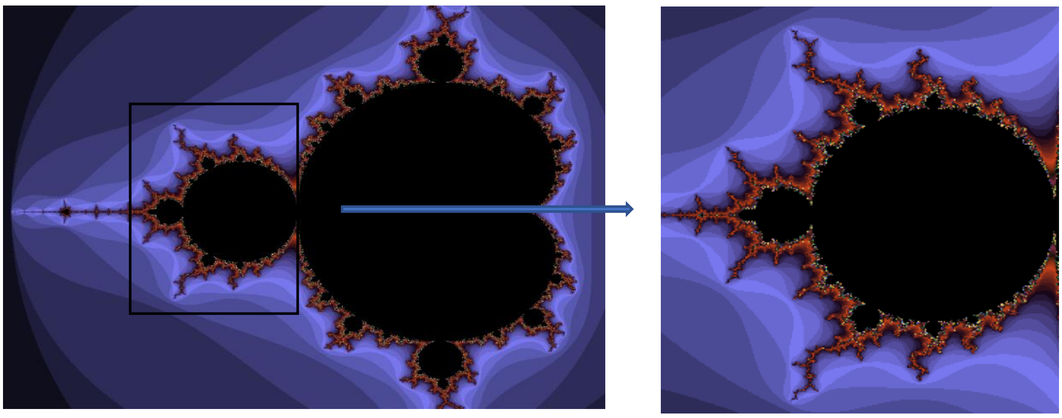
[6] Nasceu em Sidi Bel Abbes (1893) e morreu em Paris (1978) matemático francês.
[7] Nasceu em Lorient (1878) e morreu Pornichet (1929), matemático francês.

Ao buscarmos uma definição mais simples, encontramos em Araújo (2014, p. 1) que “o conceito de fractal é bastante discutido no mundo acadêmico e não se tem uma formalização por completo”. Já Barbosa (2005, p. 18), traz as definições dadas por Mandelbrot, a mesma citada acima, e as definições de Feder e Falconer. Aqui destacamos a definição dada por Falconer (1990 *apud* BARBOSA, 2005), que se utilizou de caracterizações para definir um fractal.

> Um conjunto F é fractal se, por exemplo:
> - F possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística;
> - A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
> - O conjunto F pode ser expresso através de um processo recursivo ou iterativo. (FALCONER, 1990 *apud* BARBOSA, 2005, p. 18)

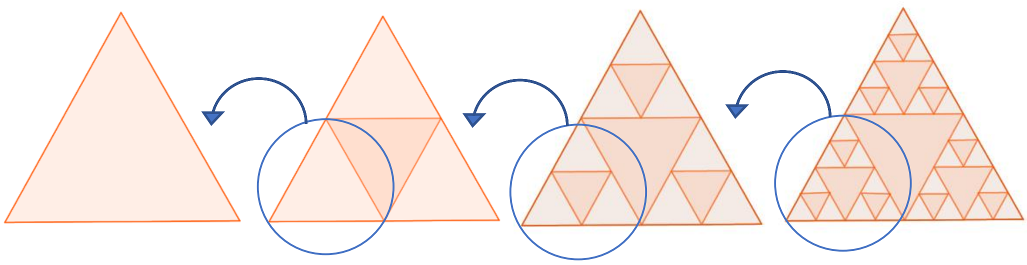
Na primeira condição para um objeto ser fractal, a autossimilaridade, percebemos que ela não precisa ser exata, visto que, os objetos classificados como fractais da natureza, não irão ser exatamente autossimilares. Essa característica é apenas aproximada ou estatística para esses objetos. Mas, quando observamos fractais obtidos por processos iterativos, por exemplo, feito em computador, a autossimilaridade passa a ser exata.

Figura 3 - Autossemelhança aproximada no Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Produzida pela autora.

Figura 4 - Autosemelhança exata no Triângulo de Sierspinsk



Fonte: Criada pela autora.

Vemos essa característica em várias referências ligadas a definição de exemplo: “uma pequena região ampliada era muito similar a uma grande, ao longo de diferentes escalas”, citado por Milani (2016, p. 32) e em Corrêa (2014, p. 12), quando diz que um “fractal é uma construção na qual um padrão é repetido desde larga escala até pequena escala, de maneira que, quando observado mais de perto a estrutura revela as mesmas figuras ou similares”. A autossemelhança aparece, principalmente, quando fazemos um recorte de certas partes e ao ampliá-las, elas parecem com o objeto original. Nessa última definição, além da autossemelhança percebemos também o processo iterativo, que é uma outra característica dos objetos fractais e terceira condição dada por Falconer.

Swiderski (2015), traz a definição de Sallum, também baseada na definição de Mandelbrot, em que se reflete a mesma ideia:

> um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma representação do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro. (SALLUM, 2005 *apud* SWIDERSKI, 2015, p. 2)

Nessa passagem, podemos observar mais uma característica dos fractais, a dimensão. Para falarmos sobre a dimensão fractal, vejamos antes alguns conceitos:

Dimensão Euclidiana – é a dimensão definida para os objetos euclidianos. Após Euclides, durante anos, o comprimento, a largura e a altura determinavam o conceito de dimensão encontrando-se descrita na famosa obra Os Elementos. Nela, o ponto tem dimensão zero; a reta, dimensão 1; o plano, dimensão 2 e o sólido, dimensão 3. Nunes (2006, p. 36) a define como sendo a dimensão na qual os objetos são relacionados ao espaço no qual são inseridos.

Dimensão topológica – A grosso modo podemos definir a topologia como o estudo matemático da continuidade. Como já citado acima, os objetos podem ser transformados através de um homeomorfismo preservando a sua dimensão, assim, linhas retas podem ser manipuladas em curvas, círculos em triângulos e uma folha de papel plana é equivalente a uma infinitamente amassada.

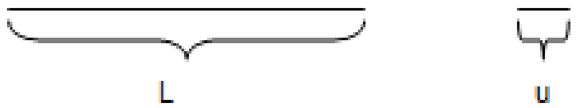
Dimensão Fractal – segundo Gleick (1989, p. 93), "a dimensão fracionada torna-se uma maneira de medir propriedades que, sem isso não tem definição clara: o grau de aspereza, ou de fragmentação, ou de irregularidade de um objeto".

Essa dimensão nos permiti traduzir a rugosidade do objeto, a estrutura e o comportamento, quer se trate de uma figura ou de um fenômeno físico, biológico ou social. Ela surgiu da observação de Mandelbrot, ao analisar alguns objetos e verificar que eles possuíam a sua dimensão não poderia ser um número inteiro, pois a superfície, ou sua estrutura não era regular. Gleick relata que Mandelbrot

> especificou maneiras de calcular a dimensão fracionada dos objetos reais, levando-se em conta alguma técnica de construção de uma forma, ou alguns dados, e fez com a sua geometria uma afirmação sobre os padrões irregulares que estudara na natureza: a de que o grau de irregularidade permanece constante em diferentes escalas (GLEICK, 1989, p. 93).

Hoje podemos calcular a dimensão fractal através de vários modelos matemáticos. Um deles leva em consideração a existência de algumas variáveis. Estas variáveis estão ligadas ao objeto a ser dimensionado e é baseada na dimensão de Hausdorff. Para entender a Dimensão de Hausdorff considere uma linha de comprimento L e outra de comprimento u, de modo que L > u. Sobrepondo a linha u sobre a linha L até cobri-la completamente, encontra-se um valor N = L/u, que nada mais é do que o número de linhas do tamanho de u que precisamos para cobrir a linha L.

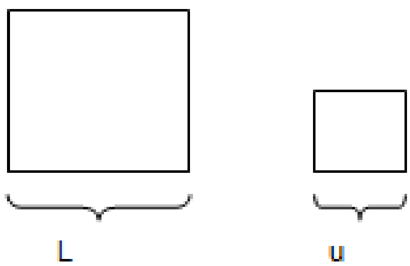
Figura 5 - Linha de Comprimento L e linha de Comprimento u.



Fonte: Elaborada pela autora.

Do mesmo modo que foi feito para a linha, pode-se medir um quadrado de lado L cobrindo-o com pequenos quadrados de lado u, obtendo-se a mesma relação $N = (L/u)^2$.

Figura 6 - Quadrado de lado medindo L e quadrado de lado medindo u.



Fonte: Elaborada pela autora.

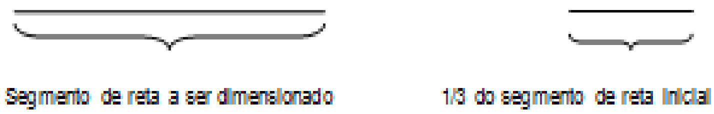
Esse processo leva a uma relação do tipo $N = (\frac{L}{u})^D$ ou, se aplicando logaritmo de ambos os lados,

$$\log N = \log (\frac{L}{u})^D \;\; \rightarrow \;\; \log \mathrm{N} = D \log \frac{L}{u} \;\; \rightarrow \;\; D = \frac{\log N}{\log L/u} \tag{1}$$

Onde D é a Dimensão Fractal de Hausdorff do objeto analisado e u é o fator de redução do objeto. Para um objeto uniforme e compacto, D é um inteiro igual à dimensão topológica. Mas, para um fractal, tem-se que D é um número fracionário. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: O objeto a ser dimensionado será: um segmento de reta, que será dividido em três partes iguais. Cada um dos três segmentos gerados com a divisão pode ser considerado como uma réplica do inicial com uma redução de 1/3, ou seja, u=1/3. Logo L/u= 1/1/3 = 3. Como mostra a figura 7:

Figura 7 - Segmento de reta a ser dimensionado.



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim para o cálculo da dimensão fractal consideraremos as 3 peças em que o segmento inicial foi dividido (N) e o fator de redução (u) utilizado para comparação dos segmentos originados com inicial, assim:

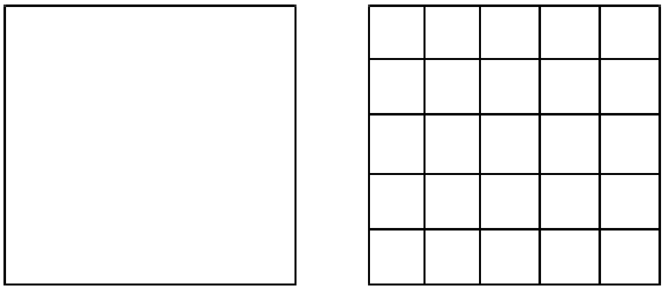
$$D = \frac{\log 3}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} \;\; \rightarrow \;\; D = 1 \tag{2}$$

Onde D é dimensão fractal, que neste caso coincide com a dimensão euclidiana.

Exemplo 2: Tomando um quadrado e dividindo cada lado em 5 partes iguais. Teremos 25 novos quadrados. Observamos que cada quadrado gerado possui a medida do lado auto similar ao inicial, numa escala 1/5, temos, u = 1/5 e N = 25, logo:

$$D = \frac{\log 25}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)} \rightarrow D = 2 \tag{3}$$

Figura 8 - Quadrado inicial a ser dimensionado e uma cópia com lado dividido em cinco pedaços iguais.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como observamos nos exemplos anteriores, a curva regular, linha reta, tem dimensão 1 e o quadrado, dimensão 2, dessa forma concluímos que os objetos euclidianos possuem dimensão euclidiana igual a fractal. Para Baldovinotti (2011), a Geometria Fractal pode ser considerada uma geometria não euclidiana por causa de sua dimensão. Ele faz uma comparação entre as dimensões usadas nas duas geometrias, elemento que as diferencia, destacando que "a dimensão inteira é a utilizada pela geometria euclidiana na qual a reta, o plano e o espaço possuem, respectivamente, dimensão um, dois e três. Na Geometria Fractal esta dimensão é fracionada, ou seja, ela está entre as dimensões euclidianas" (BALDOVINOTTI, 2011, p. 29).

Até aqui já podemos traçar uma definição ou delinearmos passos para identificar os fractais a partir das características acima citadas. Desta forma, ao observar uma parte de um fractal, ele possuirá semelhança com o todo em escala reduzida. Para produzir um fractal, utilizamos um processo iterativo e infinito e se o fizermos em um computador, sua infinidade dependerá da capacidade do computador de assim produzi-lo. Sua dimensão, não será um número inteiro, 0, 1 ou 2, mas números decimais entre eles. Por exemplo, ao observarmos uma folha de papel, sabemos que ela está ocupando um espaço, mesmo que sua espessura seja milimétrica, mas ela não ocupa todo o espaço compactamente, suas fibras possuem espaços, assim não podemos dizer que sua dimensão é 2 nem é 3. Logo sua dimensão fractal será um número racional entre 2 e 3.

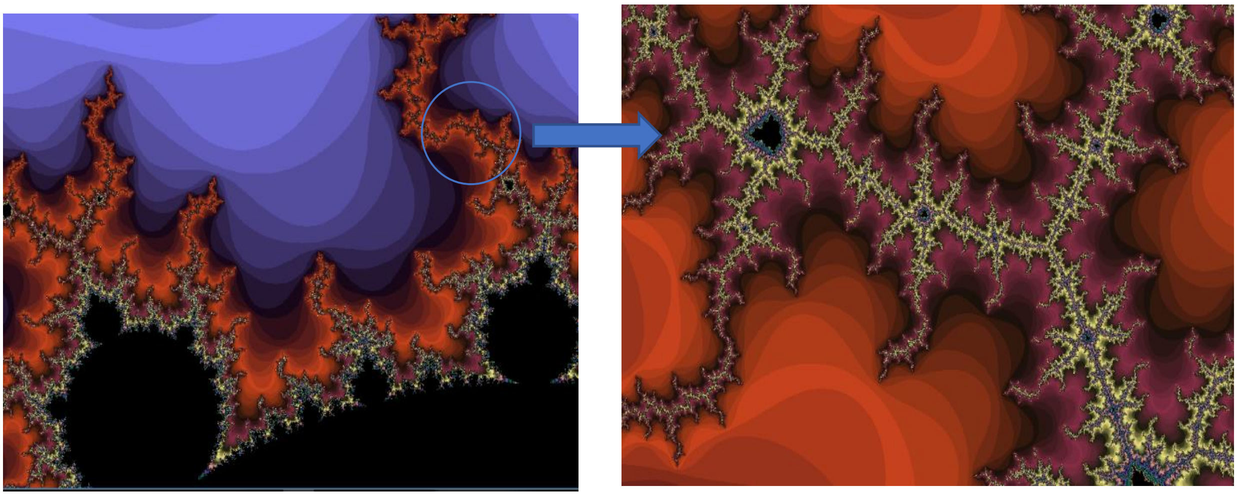
Podemos destacar também que quando estamos falando de fractais artificiais, produzidos por computador, nunca teremos o fractal por completo, pois o que vemos é apenas um dos seus níveis de iteração. Quando vemos um fractal natural podemos contemplá-lo por completo pois não podemos nem aumentá-lo nem diminuí-lo, ou seja, mas observar suas partes que são semelhantes ao todo.

Coelho (2015, p. 23) traz uma quarta característica que não é mencionada especificamente em outros trabalhos: a estrutura fina. Para ele, ela "consiste em detalhamento infinito. Sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes", fato observado em fractais que não possuem semelhança exata. E continua, nos fractais

> a cada ampliação, surgem mais detalhes, mesmo que se repita o processo indefinidamente. Se o fractal for construído na tela gráfica de um computador, os detalhes aparecerão nas ampliações sucessivas, até onde o computador suportar a realização dessas ampliações. (COELHO, 2015, p. 23)

A figura 9 foi obtida com o software XaoS, quanto mais iterações fazemos e ampliamos, observamos mais detalhes no Conjunto de Mandelbrot.

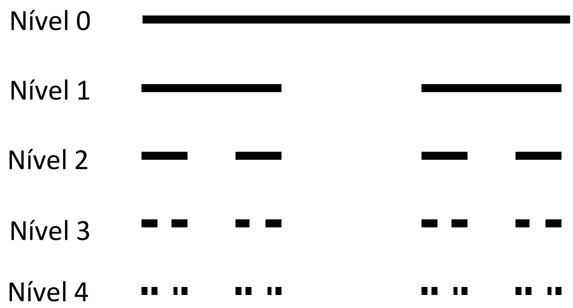
Figura 9 - Estrutura fina no Conjunto de Mandelbrot.



Fonte: Capturada pela autora no software XaoS.

Um ponto a ser observado é que "os fractais têm autossemelhança, pois são semelhantes em si, mas não necessariamente similares entre si" (THE FRACTALS..., 2007), ou seja, suas partes são semelhantes ao todo, mas um fractal não precisa ser parecido com outro para ser fractal, basta possuir as características de um fractal. Assim, um fractal pode ser um objeto da natureza, como as montanhas ou nosso sistema circulatório, ou ainda, um objeto criado a partir de um segmento de reta, quando o dividimos em três partes iguais e retiramos a parte do meio, repetindo o processo infinitamente, constituindo assim o Conjunto de Cantor, como observamos abaixo:

Figura 10 - O Conjunto de Cantor



Fonte: Elaborada pela autora.

Segundo Janos (2008, p. 1) o "Conjunto de Cantor é talvez o primeiro objeto reconhecido como fractal. Embora não possua o apelo visual da maioria dos fractais, este conjunto é peça fundamental nos estudos fractais e dos Sistemas Dinâmicos". A figura 10 mostra o Conjunto de Cantor construído até o nível 4, o que nos possibilita perceber o processo iterativo e infinito. Podemos calcular sua dimensão. Para isso, escolhemos um nível. Aqui, vamos escolher o nível 1, desta forma, temos N=2 e o fator de redução u=$\frac{1}{3}$, comparando-o como anterior:

$$D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} \quad \rightarrow \quad D = \frac{\log 2}{\log 3} \quad \rightarrow \quad D \cong 0{,}63092 \qquad (4)$$

Assim, como podemos observar, não há realmente uma definição exata ou certa para esse termo, talvez vez porque ela não seja extremamente necessária, pois, podemos concordar que, os fractais são fácies de serem identificados e quando não, podemos fazê-lo através de suas características, mesmo assim, podemos resumir que um Fractal é um objeto, ou conjunto de objetos complexos, geométricos ou naturais, que possui partes semelhantes ao todo em escala reduzida, criados por um processo iterativo e com dimensão fracionada.

2.3 A GEOMETRIA FRACTAL E SUAS APLICAÇÕES

Apesar de ser uma geometria razoavelmente nova, muitas são as aplicações da geometria fractal hoje, principalmente por ela ajudar a entender muitos fenômenos naturais e sociais.

Figura 11 - Fractais na natureza - Nuvens.

Fonte: Autoria própria.

Figura 12 - Fractais na natureza - Raízes de uma árvore.

Fonte: Autoria própria.

Rabay (2013), enumera a sua aplicação na agricultura, nas ciências médicas e biológicas, computação gráfica, ressaltando que a "análise de imagens no diagnóstico precoce de câncer e do Mal de Alzheimer pode ser feita através de modelagem, utilizando-se os fractais" (RABAY, 2013, p. 2), destacado também por Coelho (2015, p. 54):

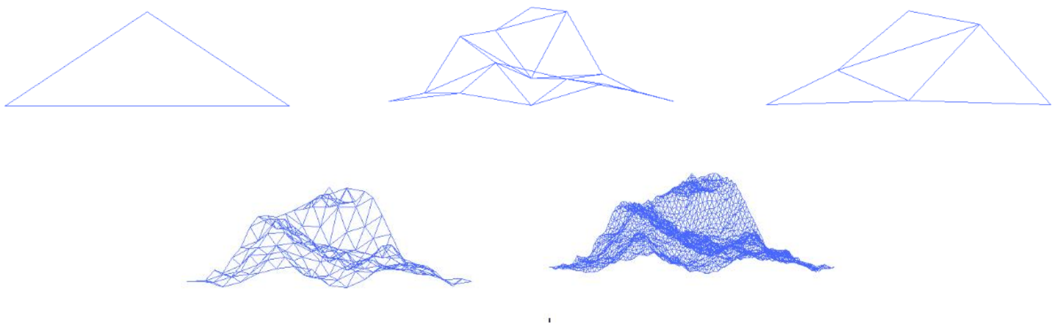
> Um dos campos em que esse procedimento é mais desenvolvido é o diagnóstico do câncer, por meio da análise de imagens de tumores. As evidências experimentais sugerem que tumores malignos (câncer) apresentam uma fronteira com dimensão fractal superior às que ocorrem em agregados de tecidos normais.

Rabay (2013) destaca também o uso de antenas com forma de fractais, em "equipamentos móveis, que além da otimização de espaço aumentam a capacidade de transmissão, tanto na ampliação de banda de frequência como na diversidade de banda, consequentemente aumenta-se a diversidade de serviços a serem oferecidos" (RABAY, 2013, p. 2). O que é confirmado por Coelho (2015):

> A resposta das antenas fractais difere acentuadamente das tradicionais, uma vez que são capazes de funcionar de forma otimizada, simultaneamente em várias frequências. Essa característica faz das antenas fractais uma excelente alternativa para aplicações de recepção de banda larga. (COELHO, 2015, p. 55)

Swiderski (2015) mostra a aplicação dos fractais na computação gráfica, descrevendo que eles “são muito utilizados para criação de efeitos especiais em filmes tornando formas artificiais mais realistas e também, para representar elementos da natureza como planetas, satélites, superfícies, plantas e nuvens” (SWIDERSKI, 2015, p. 14). Ele ainda cita o seu uso nas Ciências Biológicas, Geografia, Medicina, na Engenharia e na Arquitetura. Como observamos na figura 11 a criação do relevo montanhoso por processo computacional onde percebemos a aplicação do processo iterativo dos fractais.

Figura 13 - Criação de relevo com processo iterativo.



Fonte: (OLIVEIRA *et al*, 2014).

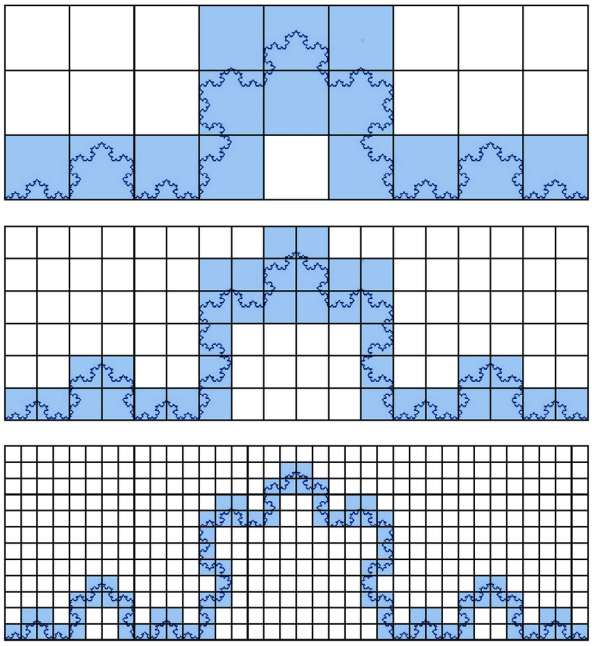
Coelho (2015) também traz outras áreas em que os fractais são usados e suas aplicações, citando além das anteriores, a mineralogia e a indústria:

> listando-se aplicações na Mineralogia, com o objetivo de medir a densidade dos minerais, a evolução dos terrenos e a descontinuidades das rochas; na Biologia, para a análise da rugosidade dos fungos e de corais; na indústria, como a detecção automática de falhas em produtos têxteis; no solo, na chuva, na Economia, na Ecologia. (COELHO, 2015, p. 56)

Para as atividades agrícolas conhecer o solo permite a sua utilização de forma mais adequada e por mais tempo. Uma das maneiras de conhecer a sua porosidade, por exemplo, é o uso da Teoria Multifractal, usando-se da técnica de contagem de caixas ou *Box-counting* “usada para estimar as propriedades de escalamento do conjunto fractal cobrindo a medida com caixas de tamanho L e contando o número de caixas que contêm pelo menos um pixel que represente o objeto em estudo” (JORGE *et al.* , 2008, p. 14), onde L é a escala adotada. Assim,

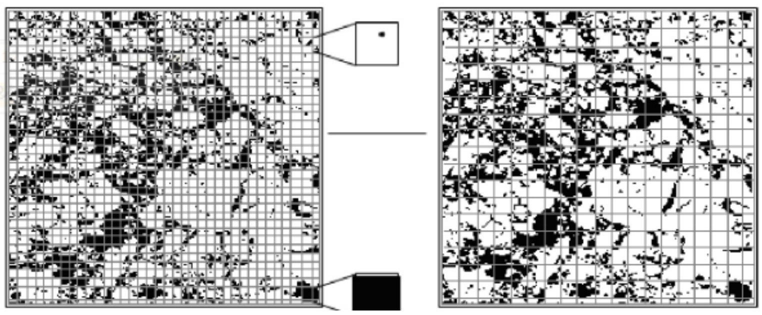
> são apresentadas diferentes grades ou malhas construídas a partir do centro de gravidade da estrutura, onde se quer conhecer a dimensão fractal. As malhas são construídas a partir de um quadrado original, onde o centro geométrico coincide com o centro de gravidade da estrutura. (JORGE *et al*., 2008, p. 16)

Figura 14 - Técnica da contagem de caixas em várias escalas.



Fonte: (PILGRIM; TAYLOR, 2019).

Figura 15 - Técnica *Box-counting* aplicada à análise do solo.



Fonte: (JORGE e*t al*., 2008)

Mingoranci (2014) cita uma aplicação específica, já em 1978, quando “Loren Carpenter, cientista da computação, ajudava a criar a visualização do comportamento de uma aeronave durante o voo de acordo com o documentário Fractais – Uma jornada pela dimensão oculta, de Scientific American Brasil” (MINGORANCI, 2014, p. 64). Além disso, relata que

> Os conhecimentos da geometria fractal estão sendo adotados no urbanismo para o estudo de modelos de crescimento, como ferramenta de desenho e estudos comparativos entre padrões fractais e outros índices, como o de violência, o de qualidade urbana, aspectos funcionais e evolução das cidades (MINGORANCI, 2014, p. 70).

Desde 1999, a análise fractal é usada na arte para autenticar as obras de Jacson Pollock, depois que o físico Richard Taylor e seu grupo de estudos publicou a primeira análise fractal de suas obras. Segundo Taylor (2017), as obras de Jacson Pollock, pintor americano que usava a técnica de gotejamento, são fractais (TAYLOR, 2017). Assim, Jacson faz parte do Expressionismo Fractal, termo criado por Taylor para descrever arte fractal feita por seres humanos, sem o computador.

> Taylor mediu nos quadros a dimensão fractal – número que mede a complexidade do fractal. Percebeu que ela aumenta à medida que Pollock refina sua técnica, atingindo valores maiores nas últimas obras, como se o pintor estivesse inconscientemente à procura de fractais cada vez mais complexos. Enquanto suas telas iniciais, feitas em 1945, têm uma dimensão fractal baixa, semelhante à de uma couve-flor, as últimas obras possuem números comparáveis aos de uma floresta. (KENSKI, 2016)

Figura 16 - Blue Poles, 1952, de Jackson Pollock.

Fonte: (POLLOCK, 1952).

Percebemos, nessa pequena exposição, as mais variadas utilizações da geometria fractal, mas observamos que sua abordagem em sala de aula pouco acontece, e quando acontece é de forma muito superficial. Assim, destacamos como oportuno o nosso trabalho pois demonstra a gama de possibilidades da aplicação dessa geometria podendo usá-la de forma interdisciplinar, como é o nosso objetivo. Essa relação, a geometria fractal e a interdisciplinaridade é discutida a seguir.

2.4 A GEOMETRIA FRACTAL E A INTERDISCIPLINARIDADE

O ensino de matemática a partir de uma contextualização do cotidiano do aluno, integrada e relacionada de forma interdisciplinar, pode facilitar o seu aprendizado e desenvolver as competências e habilidades que são essenciais a sua formação, à medida que instrumentalizam e estruturam o seu pensamento. Essas competências e habilidades vão desde à compreensão e interpretação de situações, a apropriação de linguagens específicas, a tomada de decisões e conclusões próprias, até o ato de argumentar, analisar, avaliar ou generalizar (BRASIL, 2000).

Como a proposta do nosso trabalho é usar a Geometria Fractal como meio para a interdisciplinaridade, precisamos buscar uma definição para esse termo. No Brasil, as primeiras produções sobre o tema datam da década de 1970, e foram feitas por Hilton Japiassu, seguido por Ivani Fazenda. Em seu primeiro trabalho, Japiassu trazia questionamentos e conceitos seus e já alertava a falsa ideia de que ela indica apenas uma reunião ou coleção de disciplinas ou especialidades. Ainda segundo Japiassu (1976), ela se define como uma crítica às fronteiras das disciplinas, na busca da sua exploração e religação do que está fragmentado, mais sem esquecer as especificidades de cada uma das disciplinas envolvidas. (FAZENDA, 2011).

Essas ideias, são a base para definições mais atuais do tema. Para Alvarenga *et al.*, (2015), a interdisciplinaridade

> em seus pressupostos, busca operar entre as fronteiras disciplinares não somente a partir de trocas teóricas, metodológicas e tecnológicas, mas igualmente criando novas linguagens e instrumentais, além do compromisso de (re)ligar conhecimentos gerados pelo conhecimento disciplinar. (ALVARENGA *et al.*, 2015, p. 63)

Ela nos permite fazer novas interpretações ao cruzar as fronteiras das disciplinas, criando novas roupagens, religando ou ligando conhecimentos estudados separadamente. Nessa mesma linha, Faria (2015) destaca que “a interdisciplinaridade deve ser uma prática que independe das condições, do alcance e dos limites das disciplinas” (FARIA, 2015, p. 108). Ela deve justamente entrelaçar as fronteiras das disciplinas, dando novo sentido a questões particulares destas.

Nas palavras de Morin ela “pode querer dizer troca e cooperação, o que faz com que a interdisciplinaridade possa vir a ser algo orgânico” (MORIN, 2007, p. 50), ou seja, algo inerente à nossa prática, que deveria estar presente nela de forma natural. Uma prática, que busca uma formação continuada e que nunca acaba, visto que, sempre teremos algo novo a aprender para enriquecer nosso modo de lecionar. O PCNEM esclarece essa abordagem, mencionando que,

> o conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos. (BRASIL, 2000, p. 75)

E ainda mostra que ela estará envolvida à medida que os sujeitos, professores e alunos, "sentem necessidade de procedimentos que, numa única visão disciplinar, podem parecer heterodoxos, mas fazem sentido quando chamados a dar conta de temas complexos" (BRASIL, 2000, p. 75). Mais uma vez, percebemos a ideia de um sentido novo, ou ainda, de um melhor entendimento sobre algo quando o observamos a partir de uma outra disciplina. Deve haver um diálogo e não um monólogo, como acontece na maioria de nossas salas de aula.

Discorrendo ainda sobre aspectos da definição de interdisciplinaridade, Santos (2016, p. 17) define que ela ocorre quando "os conhecimentos de duas ou mais disciplinas são abordados em torno de um mesmo problema. Essa constitui uma estratégia para relacionar os conteúdos de naturezas diversas". Assim, ela

> [...] surge como uma possibilidade de quebrar essa rigidez e isolamento no qual os conteúdos escolares são organizados. Desta forma, existe uma real cooperação e diálogo entre as disciplinas, com os conceitos organizados em torno de estruturas conceituais e metodológicas compartilhadas entre as várias disciplinas. (SANTOS, 2016, p. 29)

Nessa tentativa de romper as fronteiras das disciplinas, cada uma traz a sua contribuição, o seu olhar, sem que uma seja superior a outra, mas ambas com subsídios de iguais valores, como podemos observar quando Fazenda (2011) ressalta que, "o que se pretende na interdisciplinaridade não é anular a contribuição de cada ciência em particular, mas apenas uma atitude que venha impedir que se estabeleça a supremacia de determinada ciência, em detrimento de outros aportes igualmente importantes" (FAZENDA, 2011, p. 59)

Assim, quando utilizamos a interdisciplinaridade estamos "na busca do sentido do saber, procurando superar a insatisfação que a fragmentação cria. Ainda que seja uma busca utópica da totalidade, é o desejo de um ensino que considere a emoção tanto quanto a razão" (ALVES, 2008, p. 100). Uma fragmentação que deixa questionamentos, dúvidas e falhas, que podem ser corrigidas com a interdisciplinaridade, podendo promover a interação entre os sujeitos envolvidos, um melhor compartilhamento e uma melhor aprendizagem dos conteúdos disciplinares de áreas diferentes: o diálogo entre a razão e a emoção.

Assim, notamos, que a interdisciplinaridade não se propõe em uma técnica, mas como uma forma de abordagem, uma atitude diante dos conhecimentos e disciplinas, como forma de reconectá-los, sem perder a maneira que cada disciplina vê seu próprio conhecimento. O que pode ser feito quando a escola se propõe na solução de um problema comunitário, por exemplo, ou quando utilizamos um tema como a geometria fractal.

A maioria dos trabalhos escritos hoje sobre geometria fractal, não possuem uma abordagem interdisciplinar, mas trazem em seu corpo um destaque para as diversas áreas em que a Geometria Fractal vem sendo usada na atualidade, como destacamos anteriormente. Além disso, podemos observar que os autores defendem o seu uso em uma perspectiva interdisciplinar, como Mingoranci (2014, p. 74), que destaca que “é a interdisciplinaridade que propõe a solução de um problema ou compreensão de um fenômeno com diferentes pontos de vista” com o olhar das outras disciplinas, cruzando as suas fronteiras e religando os conhecimentos.

Ela ainda defende que

> a riqueza desta geometria em desenvolver diversos sentidos, habilidades e a possibilidade de se trabalhar com diversos conteúdos matemáticos e de outras disciplinas evidenciam um tema a ser inserido nas escolas por meio de projetos interdisciplinares (MINGORANCI, 2014, p. 115).

Observamos aqui, o destaque dado a riqueza que a geometria fractal possui e que pode desenvolver habilidades nos alunos ao ser utilizada como ferramenta para o estudo de alguns conteúdos. Como, para construir seus objetos utilizamos o processo iterativo, o aluno pode, nesse processo, criar sequências, progressões, conjecturar fórmulas e ainda, ligar esses conhecimentos a outras disciplinas, o que pode ser feito através de projetos interdisciplinares.

Como essa geometria está intimamente ligada a natureza e perpassa diversas disciplinas, Swiderski (2015) defende que a interdisciplinaridade presente nela “garante a ela, ser uma ferramenta de leitura do mundo, sendo um equipamento de investigação e exploração de imagens e objetos” (SWIDERSKI, 2015, p. 7). Imagens essas, vistas nas ruas que passamos, nos jardins, como as raízes e galhos das árvores, as nuvens, ou quando as produzimos no computador.

Desta forma, reforçamos que "a interdisciplinaridade, ao envolver as áreas do conhecimento, deve ter a intenção de estabelecer conexões entre essas áreas a fim de buscar novos conhecimentos e/ou aprofundar as informações que se encontram estabelecidas". (GRESSLER, 2008, p. 27). Portanto, percebemos que é um campo que merece ser investigado, no sentido de subsidiar os futuros professores como um suporte a mais na melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

2.5 OS FRACTAIS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.

Como poderá ser visto no capítulo seguinte, o estado do conhecimento, são poucos os trabalhos que trazem a discussão sobre os fractais na formação do professor de matemática. Discutir a formação dos professores de Matemática ou, pelo menos, fortalecer essa formação e reforçar a importância de uma formação continuada, é uma peça fundamental para fortalecer processo de ensino e aprendizagem, principalmente buscando nessa formação uma matemática aplicável e contextualizada que posteriormente poderá ser apresentada e vivenciada pelos alunos da educação básica.

Segundo Pimenta (2006), ela já vem sendo discutida desde os anos 1990 com base na análise de prática pedagógicas de docentes, e é considerada por alguns autores como um dos problemas da educação. D'ambrósio (2000, p. 83) a considera grave, e aponta que "ela afeta particularmente a educação matemática de hoje" (D'AMBRÓSIO, 2000, p. 83). Cortez (2012, p. 73) menciona que

> [...] há um esforço muito grande por parte dos pesquisadores universitários e professores da área da educação para implantar o modelo emergente que destaca a figura do professor como sujeito capaz de refletir e criticar a sua prática com vista a melhorar, cada vez mais, sua prática pedagógica.

Essa preocupação também é observada mundialmente e pode ser verificada em Zeichner (2003, p. 36), quando relata que "esse interesse mundial pelo aprimoramento da qualidade e da equidade educacionais alberga um apelo para que se altere o tipo de ensino habitual nas salas de aula", e ainda afirma que

> a formação reflexiva do professor que estimule o desenvolvimento genuíno do educador só deve ser apoiada se estiver vinculada à luta por mais justiça social e se contribuir de algum modo para estreitar a brecha na qualidade da educação à disposição dos alunos de diferentes estratos. (ZEICHNER, 2003, p. 46)

Portanto, essa nova formação deve buscar não somente a aprendizagem de conteúdos matemáticos, mais igualmente, dá suporte para que o futuro professor adquira conhecimentos para reflexões que favoreçam um ensino de qualidade e uma aprendizagem de forma integral, que venha a refletir de forma positiva nas relações sociais dos formandos dentro e fora da escola, da universidade, na família e no seu futuro lugar de trabalho. O que é reforçado nos PCN+EM afirmando que

> o que se deseja, afinal, são professores reflexivos e críticos, ou seja, professores com um conhecimento satisfatório das questões relacionadas ao ensino-aprendizagem e em contínuo processo de autoformação, além de autônomos e competentes para desenvolver o trabalho interdisciplinar (BRASIL, 2000, p. 144)

Assim, é indispensável que a formação do professor estabeleça uma ligação entre a teoria e a prática, "para que a primeira não seja convertida em um simples aglomerado de palavras vazias, e que a segunda não se transforme em apenas uma mera repetição de técnicas e métodos" (GRESSLER, 2008, p. 36), e principalmente vivencie situações para que a apresentação dos conteúdos de sua disciplina possa ser feita de forma a envolver as demais disciplinas num trabalho interdisciplinar.

Mas essa vivencia não será possível se o professor não estiver aberto a mudanças, e sempre pronto a aprender, pois "é indiscutível que a eficácia dessa formação depende essencialmente da atitude do professor, de se compreender como alguém que, por profissão, precisa estar em contínua formação" (BRASIL, 2000, p. 142)

Além disso, os cursos de licenciatura precisam trazer uma matemática histórica, experimental, aplicável, tal como defende D'Ambrósio (2000, p. 101):

> Para os cursos de licenciatura, as aulas de conteúdo seriam mais interessantes se em vez de dar uma lista de pontos tradicional, que geralmente é fria e desconectada, fossem estudados, em muitos dos seus aspectos – teóricos, históricos, experimentais, aplicações -, fórmulas e resultados importantes e gerais.

Além de tornar as aulas mais interessantes, quando ministradas desse jeito, destacando esses aspectos, as aulas podem gerar debates e reflexões possibilitando o desenvolvimento de um professor crítico e reflexivo que "está sempre atento às transformações na sua prática pedagógica, no seu cotidiano escolar no sentido de provocar mudanças desejáveis na sociedade" (CORTEZ, 2012, p. 76).

Assim, destaco dois autores que propõem o uso da Geometria fractal para o ensino de conteúdos matemáticos. O primeiro é Batista (2017) que propõe o uso da geometria fractal para o ensino de sequências numéricas no curso de licenciatura destacando que

> utilizar fractais para introdução do conteúdo de sequências numéricas remete às conexões estabelecidas entre o Cálculo e a Geometria, em que o primeiro é apresentado nos livros pelo conteúdo [...] e a Geometria Fractal desenvolve o espírito de curiosidade frente ao inesperado em cada iteração (BATISTA, 2017, p. 30).

Já Eli (2014), traz uma proposta de ensino contendo atividades sobre a representação de números complexos, algumas delas com o uso de recurso computacional. Esse autor destaca a geometria fractal e outras aplicações, como forma de ajudar na aprendizagem desse conteúdo mencionando que, quando ensinamos o conteúdo de números complexos, é importante

> discutir com os estudantes sobre as aplicações, como na geometria fractal, na teoria quântica e na aerodinâmica, despertam interesses, pois o contato de conhecimentos

> gerados pelas discussões desse objeto de estudo proporciona aos estudantes, sentidos para aprendê-lo. (ELI, 2014, p. 71)

A diferença entre esses dois trabalhos é que Batista (2017) propõe essa atividade já no ensino superior, na licenciatura em matemática, fazendo os futuros professores perceberem a contextualização que pode ser dada a um conteúdo específico, ou seja, o uso da Geometria Fractal para ensinar sequências. A mesma Geometria pode ser usada como contexto para ensinar números complexos e isso também pode acontecer no ensino superior, pois no futuro, esses alunos poderão fazê-lo como futuros professores em um nível mais elementar, na Educação Básica.

Desta forma, a Geometria Fractal vem nesse trabalho, como proposta de articular novos saberes e reflexões para a formação do professor. O autor Baldovinotti (2011) relata que mesmo existindo pesquisas que recomendam o uso de fractais em sala de aula, quase sempre não acontece

> pois são poucos os professores que tiveram oportunidade de estudar o tema no seu curso de licenciatura ou mesmo em cursos de formação continuada. Isto acarreta um desconforto ao docente, já que a insegurança em relação ao assunto inibe seu ensino na escola (BALDOVINOTTI, 2011, p. 63)

Assim, um caminho para amenizar o problema acima citado, ou seja, a oportunidade de possibilitar uma aproximação dos alunos de licenciatura com a geometria fractal vem a ser o nosso projeto, que busca apresentar aos futuros professores uma proposta pedagógica utilizando-a, fazendo-os refletir e analisar essa ferramenta e buscar contribuições para aumentar seu potencial, se assim considerarmos.

3 ESTADO DO CONHECIMENTO

Para satisfazer o primeiro objetivo específico do nosso trabalho fizemos um levantamento do que vem sendo escrito sobre a geometria fractal e formação de professores de matemática. Analisamos as dissertações e teses no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes[8]. Desta forma, como abordamos “apenas um setor das publicações sobre o tema estudado” (ROMANOWSKI, 2006, p. 39), temos um estado do conhecimento.

Assim, nosso estudo foi composto por três etapas: i) a escolha dos descritores que seriam utilizados e um levantamento das dissertações e teses no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, ii) analisar os trabalhos selecionados, fazendo a leitura desses e o levantamento de alguns dados importantes e iii) fazer uma categorização deles. Após acessar o site, escrevemos os descritores utilizando as palavras ligadas com o operador booleano AND. Utilizamos os descritores na sequência apresentada na tabela 1 a seguir:

Tabela 1 - Descritores na ordem em que foram utilizados.

Descritores	Quantidade de trabalhos
“fractais” AND “formação de professores de matemática” AND "interdisciplinaridade"	0
“fractal” AND “formação de professores de matemática” AND "interdisciplinaridade"	0
“fractais” AND “formação de professores de matemática”	1
“fractal” AND “formação de professores de matemática”	1+ (1 repetido)
“fractais” AND “formação de professores”	4 + (1 repetido)
“fractal” AND “formação de professores”	5 + (3 repetidos)
“fractais” AND “ensino superior”	1
“fractal” AND “ensino superior”	2 + (2 repetidos)
“fractais” AND “licenciatura em matemática”	3 + (1 repetido)
“fractal” AND “licenciatura em matemática”	0 + (6 repetidos)
"fractais" AND "interdisciplinaridade"	3
"fractal" AND "interdisciplinaridade"	0 + (2 repetidos)
Total	20

Fonte: Elaborada pela autora.

Não utilizamos a combinação dos descritores "interdisciplinaridade" e "formação de professores" pois o trabalho tem como base a geometria fractal. Ao utilizarmos abriríamos um leque muito grande de trabalhos que não possuíam relação mais próxima com o queremos.

[8] http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/, acessado pela última em vez 02/09/2018, ás 18:40h.

Passamos então para a segunda fase, a leitura dos textos e o levantamento de alguns dados importantes. Após a leitura, verificamos que alguns desses trabalhos não possuíam nenhuma das ideias chaves da nossa pesquisa: fractais e formação de professores ou fractais e interdisciplinaridade. Finalizamos com um total de 9 trabalhos, que foram escritos entre 2005 e 2017, determinando assim nosso espaço temporal. Essa análise também nos possibilitou destacar alguns aspectos informativos, como podemos ver na tabela a seguir:

Quadro1 - Fractais, Interdisciplinaridade e Formação de professores de 2005 a 2017.

Autor	Título	Ano	Tipo	Programa
Bárbara Regina da Silveira Batista.	Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciados em Matemática.	2017	Dissertação	Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Edmilson Alves de Andrade Júnior	Ciência contemporânea na formação de professores: o caso dos fractais em uma perspectiva Kellyana	2015	Dissertação	Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências
Flavio Roberto Gouvea.	Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica.	2005	Dissertação	Mestrado em Educação Matemática
João Lucas de Paula Batista	Uma proposta de ensino de acústica a partir da análise dos timbres de instrumentos musicais do samba.	2016	Dissertação	Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
José Carlos Pinto Leivas.	Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.	2009	Tese	Doutorado em educação.
Juliano Eli.	Números complexos e suas aplicações: Uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica.	2014	Dissertação	Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Márcia Denise Gresller	Construindo uma Percepção Complexa da Realidade a partir do Estudo dos Fractais	2008	Dissertação	Mestrado em Educação em Ciências e Matemática
Nilson Jorge Baldovinotti.	Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática.	2011	Dissertação	Mestrado em Educação Matemática
Thiago Barcelos Castilhos.	Possibilidades pedagógicas para introdução de geometria fractal no ensino básico e na formação de professores de matemática.	2014	Dissertação	PROFMAT

Fonte: Elaborada pela autora

Como podemos perceber, o tema vem sendo discutido a alguns anos, mas as produções, com a discussão que propomos, são poucas. Como terceira etapa, fizemos uma categorização a partir das leituras realizadas: Os fractais e a formação do professor de matemática, e, Os fractais e outros recursos didáticos. A seguir, traremos uma discussão sobre os fractais e a formação do professor.

3.1 OS FRACTAIS E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

A formação do professor de Matemática hoje, deve buscar não somente a aprendizagem de conteúdos matemáticos, mas principalmente, dar suporte para que o futuro professor adquira conhecimentos que favoreçam um ensino de qualidade e uma aprendizagem de forma integral. Como proposta que lhe sirva de suporte, apresentamos a geometria fractal.

Nem todos os trabalhos aqui analisados possuíam essa perspectiva, ou seja, discutiam a formação do professor de matemática, mas trazem proposta de atividades pedagógicas usando a geometria fractal como ferramenta para a Educação Básica e/ou Ensino Superior sendo discutidas ou apresentadas nas aulas de disciplinas de ensino/estágio/laboratório dos cursos de Licenciatura em Matemática, defendendo que ela pode proporcionar aos alunos um maior interesse pela matemática e seja assim, um facilitador da aprendizagem.

Com esse viés, Castilhos (2014) propõe em seu trabalho, atividades pedagógicas para 7º e 8º ano do EF, 1ª e 2ª séries do EM e para licenciandos do curso de Matemática. A última proposta visa mostrar as possibilidades do uso dos fractais no ensino de razão, fração e progressões geométricas, propostas nas atividades anteriores.

Eli (2014), como já mencionado, traz uma proposta de ensino contendo atividades sobre a representação de números complexos. Para isso, ele usa a geometria fractal e o uso de recurso computacional e outras aplicações, na expectativa de facilitar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo mencionando.

Percebemos que os fractais aparecem como uma aplicação do conteúdo estudado, possibilitando ao aluno não só aprender o conteúdo, mas ver aplicações do conhecimento na prática e conhecer temas interessantes. Com esse mesmo pensamento, a autora Batista (2017) propõe o uso da geometria fractal para o ensino de sequências numéricas no curso de Licenciatura. Ela defende que podemos aproveitar esse processo iterativo que apresenta o dinamismo do infinito, uma das características dos fractais, para estudar as “sequências que podem ser analisadas em convergência e divergência, desta forma agregando ao conteúdo de sequências numéricas a exploração visual construída pelo aluno para compreender os conceitos necessários" (BATISTA, 2017, p. 30).

Gouvea (2005) também traz propostas de atividades com fractais. Nesse caso, para o estudo de conceitos geométricos. Essas atividades foram elaboradas e aplicadas a alunos do 1ª ano de Licenciatura em Matemática utilizando o caleidoscópios e softwares educacionais, justificando que a escolha dessa turma se deu "pelo fato desses alunos terem concluído o Ensino Médio recentemente, pois pesquisas apontam que alunos do 1ª ano da universidade ainda mostram dificuldades quando o tema tratado é Geometria" (GOUVEA, 2005, p. 86).

Não vemos, nos textos desses autores, discussões abordando a formação do professor, mas podemos crer que, quando elaboramos ou propomos atividades para facilitar a aprendizagem dos alunos não deixamos de contribuir para a formação daqueles que se apropriam desses materiais buscando essa mesma intenção.

Com o pensamento nessa formação, o autor Leivas (2009), faz uma análise da geometria nos cursos de Licenciatura do Rio Grande do Sul buscando as geometrias não euclidianas, e percebe que a geometria fractal aparece em alguns currículos, como tema dentro de uma disciplina. Assim, ele faz sua discussão apontando possibilidades de utilizar a imaginação, intuição e visualização em disciplinas de um curso de Licenciatura em matemática, buscando uma melhor formação do futuro professor, mencionando que "inovação no desenvolvimento curricular na formação do professor parece ser exigência necessária e urgente, tanto no que diz respeito aos conteúdos quanto às formas de tratamento do conhecimento matemático" (LEIVAS, 2009, p. 14).

Já Andrade Junior (2015), discute a formação do professor de Ciências, citando também o de Matemática, discutindo sobre o paradigma dominante e o emergente, percorrendo as ideias da complexidade, destaca à resistência da disciplinaridade, deixando a formação do professor contemporâneo a desejar. Nesse sentido ele defende que

> É preciso incorporar uma prática docente de caráter racional, no sentido de que, se a ciência contemporânea reforça o papel inventivo do cientista, o docente contemporâneo deve ser carregado de hipóteses, conjecturas e qualquer processo que possibilite a detecção de erros. Mas isso só é possível a partir da formação de professores com uma visão de educação voltada para a interdisciplinaridade e complexidade (ANDRADE JÚNIOR, 2015, p. 27).

Observamos, além da complexidade, que o autor defende o uso da interdisciplinaridade, abordando atividades baseando-se na Teoria dos Construtores Pessoais de George Kelly e no uso dos fractais.

O autor Baldovinotti (2011) em suas discussões, defende a inserção desse tema nos cursos de licenciatura, como parte de pesquisa ou na elaboração de futuras propostas pedagógicas, utilizando-o na perspectiva de "reconhecer o aluno do curso de licenciatura como um ativo construtor de seu conhecimento, assimilando e organizando suas ideias por intermédio da maneira de como interpretar suas experiências durante a sua formação" (BALDOVINOTTI, 2011, p. 85), pois, segundo ele, mesmo existindo pesquisas que recomendam o uso de fractais em sala de aula, quase sempre não acontece, o que já foi mencionado anteriormente.

Assim, percebemos que o uso da geometria fractal como ferramenta para o ensino de matemática pode perpassar todos os níveis de ensino, logo os futuros professores devem conhecê-la e pensá-la como base para a aquisição de vários conteúdos matemáticos e, nada melhor que uma licenciatura para apresentá-los a um tema atual, interessante e interdisciplinar.

3.2 OS FRACTAIS E OUTROS RECURSOS DIDÁTICOS

Muitos autores defendem o uso de recursos didáticos que facilitem o processo de ensino e aprendizagem. Materiais visuais, construção de maquetes, pinturas, recortes, montagem de quebra-cabeças, e não poderia faltar, o uso do computador, e outras ferramentas tecnológicas. A geometria fractal, pode ser um desses recursos, pois nos possibilita visualizar formas muito interessantes. Muitos dos seus objetos, os fractais, podem ser desenhados, construídos no computador ou ainda, feitos com materiais manipuláveis. Os trabalhos aqui analisados trazem principalmente o uso de software para a construção destes.

Leivas (2009, p. 243), por exemplo, destaca que "a utilização da intuição e da visualização por meio de métodos computacionais é um recurso que pode ser empregado na construção, exploração e análise de Geometria Fractal". Já Gouvea (2005) é enfático defendendo o uso de softwares de Geometria Dinâmica, como o CabriGéomètre II e o iGeom, "pois através desses softwares educacionais podem-se efetuar construções geométricas muito rapidamente e com bons resultados". (GOUVEA, 2005, p. 12)

Batista (2017), traz em seu trabalho a construção de fractais pelos alunos com uso de régua, compasso, lápis e papel, fazendo uma atividade mais manual. Esse recurso é possível até certo ponto, visto que, o processo iterativo pode ser dificultado. O que é destacado por Castilhos (2014), quando propõe que

> a construção desses objetos feita manualmente não nos proporciona total exatidão do objeto, ou melhor, só conseguimos fazer certo número de iteração, assim é dada uma grande oportunidade para a utilização, com os alunos, de algum software de geometria dinâmica". (CASTILHOS, 2014, p. 9).

Muitos professores de matemática não tiveram em sua formação, acesso ao uso de materiais manipuláveis e do computador como ferramenta educacional no passado, mas os licenciandos de hoje já podem se apropriar dessa ferramenta para sua utilização no futuro. Nesse sentido, Gouvea (2005, p. 18), lembra que “os professores devem procurar criar ambientes de aprendizagem, com recursos tecnológicos disponíveis aos alunos, utilizando uma proposta pedagógica atualizada, que leve em conta as novas tecnologias da informação e comunicação”. Com a mesma ideia, mas destacando a importância do uso dos materiais manipuláveis, Baldovinotti (2011) traz uma reflexão sobre esse ponto defendendo que

> durante a formação inicial e continuada do professor de matemática é necessário criar oportunidades para a reflexão e discussão sobre o uso de materiais manipulativos em sala de aula. É através desses momentos de interação que os estudantes do curso de licenciatura de matemática terão oportunidade de refletir sobre as possíveis relações existentes no contexto de sala de aula que envolve os alunos e os materiais manipulativos e a interação entre os alunos com esse tipo de recurso didático. (BALDOVINOTTI, 2011, p. 82)

Leivas (2009) ao discutir a presença da geometria fractal no currículo, nos inquieta para o uso da interdisciplinaridade como forma de agregarmos outros temas nos cursos de licenciatura

> talvez a introdução de abordagens interdisciplinares no tratamento desse conhecimento possa vir a ser uma forma de não serem criadas disciplinas novas, isoladas, simplesmente para cobrir conteúdos novos ou suprir a ausência daqueles que os mais conservadores exigem que estejam presentes nos cursos em que atuam. (LEIVAS, 2009, p. 14).

Encontramos também, nos demais trabalhos, a presença da interdisciplinaridade, mesmo que de forma sutil. O autor Castilho (2014, p. 10), por exemplo, relata que “o mais importante da introdução de fractais no ensino da matemática é a possibilidade de interdisciplinaridade e contextualização”.

Já em Batista (2017), encontramos a defesa do uso dessa geometria destacando que “o estudo da Geometria Fractal permite trabalhar numa perspectiva interdisciplinar e possibilita que os alunos tenham uma visão mais clara de utilização dessa Geometria nas diferentes áreas do conhecimento” (BATISTA, 2017, p. 21).

Outro autor, Baldovinotti (2011), mostra essa relação quando destaca que “a inserção do estudo de fractais no currículo escolar pode contribuir para o que os PCN do Ensino Médio chamam de interdisciplinaridade, uma vez que permite associar os diversos conceitos matemáticos existentes com os de outras áreas de aplicação” (BALDOVINOTTI, 2011, p. 63).

Batista (2016), traz uma proposta muito interessante, o ensino de acústica a partir dos timbres dos instrumentos musicais do samba, fazendo um passeio pelo continente africano, chegando aos fractais das comunidades africanas, baseando-se numa abordagem CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade). Uma abordagem interdisciplinar, que contextualiza e traz a aplicação de conteúdos muitas vezes estudados separadamente. Como podemos observar na seguinte passagem: "a interdisciplinaridade é fomentada pela abordagem a partir de uma perspectiva CTS do tema som e acústica, possibilitando o tratamento de alguns conceitos como timbre, intensidade e frequência de maneira conjunta aos conceitos físicos e musicais" (BATISTA, 2016, p. 59).

Tudo isso aliado a elementos culturais como a história do samba e dos seus instrumentos, a recursos computacionais como o software MatLab 2014® e o programa Audacity® utilizado para gravação de áudios, materiais que despertam a curiosidade dos alunos possibilitando uma interação maior entre aluno e conteúdo.

A autora Gressler (2008) utiliza as disciplinas de matemática, filosofia e artes para desenvolver seu trabalho juntamente com a Geometria Fractal, destacando que "a interdisciplinaridade entre essas disciplinas favoreceria de forma mais eficiente o desenvolvimento da criatividade e da reflexão, além de ampliar a capacidade argumentativa e interpretativa, enfatizando a ligação entre os saberes" (GRESSLER, 2008, p. 12). Ela utilizou materiais como régua e compasso para produção de desenhos, dobraduras, a visualização de um curta metragem, atividades desenvolvidas com alunos da 8ª série do Ensino fundamental.

Para finalizar, destacamos um ponto sobre os recursos didáticos, no que diz respeito ao uso adequado, a partir da análise da potencialidade do mesmo, pois "o recurso didático como material alternativo não é suficiente para a construção de um conceito, se não houver um conhecimento do conteúdo em toda a sua intensidade e plenitude" (LEIVAS, 2009, p. 51).

Assim, usar o computador ou outro recurso didático sem uma análise de sua potencialidade e inseri-lo em um ambiente que não garanta uma consolidação do conteúdo estudado é um risco para o professor. Desta forma, uma formação que permita ao professor ter contato com essas possibilidades, viver novas experiências, criar e analisar recursos didáticos, para que haja reflexão quanto ao seu uso, é de fundamental importância. E, como podemos perceber, são poucos os trabalhos que trazem a discussão da formação de professores e interdisciplinaridade, com atividades baseadas no estudo dos fractais, como é o propósito do nosso trabalho.

4 METODOLOGIA

Os dados apresentados na introdução nos fazem refletir ainda mais sobre nossa prática docente na busca de melhorá-la, procurando garantir a aprendizagem dos estudantes de forma mais fácil e prazerosa. Nessa perspectiva, esta pesquisa se dispõe a desenvolver uma proposta para ser utilizada em sala de aula da educação básica e desenvolvida com os alunos de Licenciatura em Matemática para análise das possibilidades quanto ao seu uso. Assim, nesse capítulo discorremos como surgiu o problema de pesquisa, a escolha do tipo de pesquisa e como ela foi desenvolvida.

4.1 SURGIMENTO DO PROBLEMA

Meu primeiro contato com os fractais deu-se ainda na graduação com o desenrolar do meu trabalho de finalização do curso de Licenciatura em Matemática. Após alguns anos, já lecionando e enfrentando as dificuldades apresentadas anteriormente, resolvi remodelá-lo e submetê-lo ao Posensino. A ideia inicial era desenvolver atividades usando fractais e utilizá-las com meus alunos, no Ensino Médio, observando o desempenho deles e o potencial do material desenvolvido.

Após sua aprovação no Posensino e já com minha orientadora, Professora Doutora Márcia Maria Alves de Assis, pensamos em realizar a pesquisa com alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática, na perspectiva de discutir com os futuros professores o uso desse material. A mudança deu-se em virtude de acreditarmos que a maioria dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática não conheciam os fractais e assim poderiam conhecê-los e verificar o potencial do uso dos fractais como recurso didático a partir de oficinas e roteiros elaborados para o ensino de matemática de forma interdisciplinar.

Assim, reelaboramos o projeto e decidimos que poderíamos realizar a pesquisa no curso de Licenciatura em Matemática da UERN, numa disciplina que possibilitasse as discussões necessárias para a realização do trabalho. Desta forma, a disciplina escolhida foi Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II. A seguir, faremos a determinação do tipo de pesquisa utilizado.

4.2. TIPO DE PESQUISA

A determinação do tipo de pesquisa é um passo muito importante para que o seu desenvolvimento se dê de forma crítica e com credibilidade. Muitos autores discorrem sobre as várias classificações e a fazem de acordo com os objetivos ou dos procedimentos técnicos utilizados, como suas fontes, sua forma de coleta de dados. Gil (2002), por exemplo, classifica as pesquisas quanto aos seus objetivos gerais em exploratória, descritiva e explicativa, e destaca a importância de se traçar um delineamento que "expressa em linhas gerais o desenvolvimento da pesquisa, com ênfase nos procedimentos técnicos de coleta e análise de dados" (GIL, 2002, p. 43), o que torna possível, na prática, fazer uma classificação.

Ele também destaca que uma "classificação não pode ser tomada como absolutamente rígida, visto que algumas pesquisas, em função de suas características, não se enquadram facilmente num ou noutro modelo" (GIL, 2002, p. 44). Desta forma, vamos destacar as características dos tipos de pesquisa que mais se aproximam da nossa, visto que, entendemos que ela não se enquadra facilmente em uma só, pois possui características de uma e de outra.

Assim, entendemos que ela se concebe numa pesquisa de natureza qualitativa exploratória possibilitando a participação do pesquisador a partir de suas observações, como descrevem Moreira (2016) sobre a pesquisa qualitativa:

> O interesse central dessa pesquisa está em uma interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos a suas ações em uma realidade socialmente construída, através de observação participativa, isto é, o pesquisador fica imerso no fenômeno de interesse. Os dados obtidos por meio dessa participação ativa são de natureza qualitativa e analisados correspondentemente. [...]. Através de uma narrativa detalhada, o pesquisador busca credibilidade para seus modelos interpretativos. (MOREIRA, 2016, p. 7)

Nessa mesma perspectiva podemos nos aprofundar em Bogdan e Biklen (1994), que sugerem que a investigação qualitativa possui cinco características, a saber:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> 2. A investigação qualitativa é descritiva;
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 47-50)

Podemos perceber, com essa abordagem, que o pesquisador precisa ter uma boa interação com o ambiente e os demais participantes, dar atenção a realização dos procedimentos propostos, possuir uma capacidade de percepção apurada, pois nada é trivial e tudo poderá constituir uma pista que nos levaria a ter uma compreensão mais elucidativa do nosso objeto de estudo (BOGDAN, BIKLEN, 1994), nos levando às respostas que buscamos.

Ser exploratória, segundo Gil, quer "dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado" (GIL, 2002, p. 41). Em Marconi e Lakatos (2002) encontramos as pesquisas exploratórias dentro da classificação de pesquisa de campo que podem ser, para elas: quantitativo-descritivas, exploratórias e experimentais, com as respectivas subdivisões. Assim para elas:

> Exploratórias - são investigações de pesquisa empírica cujo objetivo é a formulação de questões ou de um problema, com tripla finalidade: desenvolver hipóteses, aumentar a familiaridade do pesquisador com um ambiente, fato ou fenômeno para a realização de uma pesquisa futura mais precisa ou modificar e clarificar conceitos (MARCONI, LAKATOS, 2002, p. 85).

E como subdivisão encontramos "estudos de manipulação experimental" que é descrito com o propósito geralmente de "demonstrar a viabilidade de determinada técnica ou programa como uma solução, potencial e viável, para determinados programas práticos" (MARCONI, LAKATOS, 2002, p. 86). Nessa mesma linha, uma classificação é dada por Hymann (1967 *apud* MARCONI, LAKATOS, 2002, p. 20) sobre pesquisa experimental como sendo "levantamentos explicativos, avaliativos e interpretativos, que têm como objetivos a aplicação, a modificação e/ou a mudança de alguma situação ou fenômeno".

Desta forma, como nosso objetivo é compreender as potencialidades do material criado a partir das concepções dos futuros professores como possibilidade de facilitar a prática pedagógica e consequentemente a aprendizagem do aluno, entendemos que ela possui as características citadas acima. Além disso, acreditamos que esses objetivos também nos levam a delinear uma pesquisa com algumas características da pesquisa-ação, apesar de não possuir todas as características específicas desse tipo de pesquisa, mas achamos que foi a que mais se aproximou do que pretendíamos realizar, que é defina por Thiollent (2011) como

> um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 2011, p. 20)

Ele ainda destaca que "uma pesquisa pode ser qualificada de pesquisa-ação quando houver realmente uma ação por parte das pessoas ou grupos implicados no problema sob observação" (THIOLLENT, 2011, p. 15), nesse caso, buscamos soluções para melhorar a prática e a aprendizagem, elementos indissociáveis na sala de aula. Além disso, esse tipo de pesquisa é favorável aos pesquisadores que buscam fazer diferença frente ao problema enfrentado, ou seja, “com a pesquisa-ação os pesquisadores pretendem desempenhar um papel ativo na própria realidade dos fatos observados” (THIOLLENT, 2011, p. 22), não se limitando apenas a aspectos burocráticos, levantamento de dados e relatórios.

Apesar do problema não ter surgido junto aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática que participaram da pesquisa, entendemos que eles, como futuro professores, poderão avalia-los e destacar ou não o potencial do material desenvolvido, visto que, como relatado na introdução, a realidade dos resultados apresentados nos levam a enfrentar um problema mais geral em nossas salas de aulas, mas sem esquecer das peculiaridades de cada uma delas.

Podemos, também, observando os passos de planejamento que são dados por Richardson (2012) para a pesquisa-ação, verificar a semelhança do nosso trabalho com esse tipo de pesquisa, entre eles: "a) fase exploratória; b) formulação do problema; c) construção de hipóteses; d) realização do seminário; [...] f) coleta de dados; g) análise e interpretação dos dados; [...] i) divulgação dos resultados" (RICHARDSON, 2012, p. 143), no nosso caso, usamos esses passos, praticamente nessa sequência e o seminário foi substituído por oficinas.

Assim, como destacamos inicialmente, buscamos esse tipo de abordagem pois achamos que é a que mais se assemelha com o que pretendíamos realizar, visto que, uma pesquisa-ação tem por objetivo "fornecer instrumentos e meios para uma ação transformadora" (PAULON, 2005, p. 22), e ainda, buscando a tentativa de uma apreensão minuciosa dos significados e características situacionais proporcionadas pelos participantes (RICHARDSON, 2012), característica da pesquisa qualitativa destacada por Richardson, além de corroborar com o lema citado por Paulon (2005) para pesquisa-ação: "Conhecer para transformar" (PAULON, 2005, p. 22). Trazemos na sequência o relato da experiência do desenvolvimento da pesquisa.

4.3 O RELATO DA EXPERIÊNCIA – O DESENROLAR DA PESQUISA

Com o intuito de alcançarmos nossos objetivos, iniciamos fazendo um levantamento acerca do tema: interdisciplinaridade, Geometria Fractal e a formação de professores de Matemática, desenhando o cenário de como esse tema vem sendo abordado e discutido em teses e dissertações brasileiras, atendendo ao primeiro objetivo. Buscamos as teses e dissertações no catálogo da capes utilizando os seguintes descritores: interdisciplinaridade, fractais, formação de professores de matemática. No capítulo 3 trazemos em detalhes o estado do conhecimento realizado que nos permitiu direcionar melhor nossa pesquisa.

Para alcançarmos o segundo objetivo, finalizamos a organização das oficinas e dos roteiros que seriam apresentados como propostas didáticas, a verificação dos softwares, dos vídeos e a criação do questionário e das avaliações. Iniciamos nossa pesquisa de campo visitando a UERN, para conhecer melhor o ambiente onde ela ocorrerá e para levantamento de dados como tempo do curso, matriz curricular, quantidade de professor e turmas em andamento, onde fomos informados que muitos desses dados poderiam ser encontrados no portal da própria universidade. Ficou combinado com a professora da turma, o dia de início da pesquisa e o cronograma a ser seguido.

No dia combinado, fui apresentada a turma da disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Rio Grande do Norte, Campus Central, e expliquei junto com a professora o que pretendia realizar, pedindo a colaboração de todos para a realização da pesquisa.

Durante essa conversa foi esclarecido que, por questões éticas, ao escrever a dissertação, e/ou qualquer outro trabalho resultante desta pesquisa, preservaríamos suas identidades, e que, ao mencionar algo destacado por algum deles em algum questionário, seria dado um nome fictício ao participante, sem identificá-los, e ainda que nenhuma imagem seria deles. Foi pedido também, que eles assinassem um Termo de Consentimento, que garante o direito de desistência a qualquer momento, pois ela ocorrerá de forma consciente e voluntária, e que todas as informações colhidas serão arquivadas por 5 (cinco) anos, no formato digital, pela pesquisadora Paula Roberta Mendes de Oliveira.

Desta forma, a pesquisa mostra uma postura de respeito aos participantes envolvidos, preocupando-se em não ferir a ética e resguardando os direitos de todos os que se predispuserem a participar dessa empreitada científica, na busca de conhecimento e crescimento de todos os envolvidos.

Os alunos foram receptivos e como forma de criar um ambiente favorável, participei da aula como observadora, o que ocorreu também na aula seguinte, ocasião em que apliquei um questionário com perguntas que versavam sobre as perspectivas dos participantes como futuros professores, sobre sua formação e sobre a Geometria Fractal e alguns de seus elementos, para sabermos se eles já a conhecem ou se será novidade para eles, além de alguns dados pessoais, como idade e sexo. Esta estratégia de interagir e ser aceita pelo grupo a ser pesquisado, é muito importante pois

> os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 51)

Entre as aulas de observação e a realização das oficinas ocorreu o I Congresso Regional de Ensino de Matemática (COREM), realizado pelo curso de Matemática da universidade, onde também participei podendo conhecer e interagir mais com o grupo, com outros alunos do curso de Matemática e vivenciar outras atividades acadêmicas. Esse passo foi muito importante para conseguirmos o compromisso de todos no envolvimento e desenvolvimento do trabalho. Como destaca Tripp (2005, p. 455), "os alunos podem ser envolvidos pelo menos no nível de cooptação. Por exemplo, podem auxiliar como informantes, podem ajudar a colher dados por observação e entrevistar os outros participantes".

Após essas aulas iniciais de observação, realizamos as 3 oficinas de duas aulas cada, ou seja, 6 horas-aulas, que adicionadas as 4 horas-aulas relatadas anteriormente, totalizamos 10 horas de atividades como previsto. A proposta, da oficina I, de título: Conhecendo os fractais e suas aplicações, trouxe uma apresentação do tema, a apreciação e separação de figuras (fractais), a apreciação do documentário – Fractais – uma jornada pela dimensão oculta[9], uma sequência de slides que apresentava mais detalhadamente a definição e as características de um Fractal, e por fim uma avaliação da oficina.

Na oficina II, de título: A Matemática e os fractais - Construindo fractais com o GeoGebra, onde apresentamos a Matemática presente nos processos iterativos dos fractais. Iniciamos apresentando a construção de fractais no Geogebra e na sequência, a apresentação de roteiros de atividades envolvendo, conteúdos matemáticos como: divisibilidade, área, perímetro, progressão geométrica, utilizando-se dos fractais construídos para a aprendizagem desses conteúdos. Os participantes analisaram os roteiros e os avaliaram pautando-se em sua experiência como estudante e com a perspectiva de futuros professores, apesar de alguns já estarem lecionando. Quando iniciamos a oficina, estavam presentes apenas 8 participantes, que foram divididos em dois grupos. No decorrer da oficina, os demais foram chegando e como chegava um de cada vez, não foi possível constituirmos mais um grupo, já que estes iriam ficar inicialmente só. Desta forma, para essa atividade, a turma foi dividida em apenas dois grupos. Eles fizeram a análise da linguagem utilizada nos roteiros, da sequência utilizada para a construção dos conceitos estudados e do conteúdo abordado em cada roteiro, opinando sobre

[9] Documentário produzido pela NOVA/PBS, lançado pela Scientific American Brasil.

esses itens e sobre a adequação destes à série indicada, gerando dados que serão analisados na última etapa do projeto, a partir de um questionário com perguntas subjetivas. Uma observação a ser feita é que a atividade desse dia não pode ser concluída, a análise de um dos roteiros foi realizada na oficina seguinte.

Na oficina III, de título: A matemática na arte, uma forma de mostrarmos uma abordagem interdisciplinaridade para nossas aulas. Começamos com uma linha do tempo sobre a Arte e Matemática, a apreciação do episódio 12 – Caos, da Série Arte e Matemática[10]. Na sequência, visitamos o sítio do artista Jackson Pollock[11], observamos algumas de suas obras, conhecemos um pouco da sua história. Apresentamos também o Software Xaos[12]: o conjunto de Mandelbrot, software gratuito onde podemos percorrer várias partes do conjunto de Mandelbrot a partir de suas iterações.

Ao final, realizamos uma avaliação das oficinas, o que nos deu base para realizarmos discussões sobre o material elaborado a partir da análise qualitativa do que foi respondido pelos participantes nessas avaliações. Depois de realizadas as oficinas e de posse do questionário, das avaliações dos roteiros, das avaliações das oficinas e da avalição final, fizemos a compilação dos dados.

Dos dados pessoais, fizemos uma análise quantitativa e dos demais dados, realizamos uma análise qualitativa utilizando algumas técnicas da análise de conteúdo de Bardin (1977). Para ela, a análise de conteúdo pode ser constituída de:

> todas as iniciativas que, a partir de um conjunto de técnicas parciais mas complementares, consistam na explicitação e sistematização do conteúdo das mensagens e da expressão deste conteúdo, com o contributo de índices passíveis ou não de quantificação, a partir de um conjunto de técnicas, que embora parciais, são complementares. Esta abordagem tem por finalidade efectuar deduções lógicas e justificadas, referentes à origem das mensagens tomadas em consideração (o emissor e o seu contexto, ou, eventualmente, os efeitos dessas mensagens). (BARDIN, 1977, p. 42)

Assim, pretendemos "compreender o sentido da comunicação (como se fosse o receptor normal), mas também e principalmente desviar o olhar para uma outra significação, uma outra mensagem entrevista através ou ao lado da mensagem primeira" (BARDIN, 1977, p. 41), ou seja, buscar "o realçar de um sentido que se encontra em segundo plano" (BARDIN, 1977, p. 41) ajudando-nos nas discussões dos resultados, baseando-nos nas respostas e interpretações

[10] Série criada em 2001 pela TV Cultura e TV Escola/MEC.
[11] Influente pintor expressionista abstrato que possui obras com características fractais. Nasceu em Cody, Wyoming em 1912 e morreu em Nova York, EUA em 1956. Site: https://www.jackson-pollock.org/
[12] Software gratuito que possibilita visualizar diversas iterações do Conjunto de Mandelbrot. Disponível em: https://www.ufrgs.br/soft-livre-edu/software-educacional-livre-na-wikipedia/xaos/. Acesso em: 12 ago. 2018.

dadas pelos sujeitos participantes, observando ainda, a proposta do curso de Matemática da UERN e da disciplina Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II, e ainda, relatando as dificuldades e outras considerações encontradas durante a pesquisa, na perspectiva de alcançarmos o nosso terceiro objetivo.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para realizarmos nossas discussões e chegarmos aos resultados da pesquisa baseamo-nos nos três polos cronológicos citados por BARDIN (1977, p. 95) para análise de conteúdo em pesquisas qualitativas: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados. A pré-análise, que "é a fase de organização propriamente dita" e "tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise" (BARDIN, 1977, p. 95)

Assim, iniciamos com uma leitura flutuante do material recolhido como forma de estabelecer um primeiro contato, para escolha destes e para organizar sua utilização futura na perspectiva de verificar o que foi proposto como terceiro objetivo do nosso trabalho: observar e apontar as potencialidades do uso da Geometria Fractal, em uma perspectiva interdisciplinar, na formação de professores.

Preparamos o material para a exploração, que é nossa segunda etapa, digitando as respostas dadas pelos participantes em tabelas, que estarão no apêndice do trabalho, e denominamos os participantes por letras do nosso alfabeto, de modo a preservar suas identidades como foi acordado no início da pesquisa para que esta seja baseada em respeito e ética. Na exploração do material, escolhemos como unidade de registro a palavra e, a partir delas, determinamos as seguintes categorias: O potencial do material elaborado, Tratamento didático do material e a sequência utilizada e, Os fractais e a formação do professor de Matemática, que serão discutidas na terceira etapa que é o tratamento dos resultados. Mas, apesar de optarmos por uma abordagem qualitativa de nossa pesquisa, vamos destacar inicialmente alguns dados quantitativos.

O curso de Licenciatura em Matemática da UERN possuía no semestre 2019.2 com 62 alunos no período vespertinos e 100 alunos no período noturno sendo que em cada semestre são abertas 30 novas vagas. O corpo docente é formado por 20 professores efetivos e sua matriz curricular conta com uma carga horária total de 3305 horas, mas está passando por uma reformulação, o que havia acontecido pela última vez em 2006.

A disciplina escolhida para a pesquisa era composta por 15 alunos, sendo que 14 participaram. Analisamos inicialmente o questionário que fizemos antes de começarmos as oficinas. Dele, obtivemos alguns dados estatísticos sobre a turma como sexo, idade e suas opiniões sobre questões relativas à matemática, seu ensino e dificuldades enfrentadas por professores e alunos. Compareceram na primeira oficina 14 alunos, e na última, 13 alunos. Dos, 14 iniciais, temos 7 alunos do sexo masculino e 7 do sexo feminino. Suas idades variavam de 19 a 46 anos, como mostra tabela 2:

Tabela 2 - Idade dos participantes

IDADE (Anos)	QUANTIDADE
15⊣20	3
20⊣25	8
25⊣30	1
30⊣35	0
35⊣40	0
40⊣45	0
45⊣50	2

Fonte: Elaborada pela autora.

Entre os participantes, dois estavam lecionando, mesmo não tendo concluído o curso. Um deles, considera que em sala de aula leciona de forma tradicional, o outro, acha que utiliza uma mistura da forma tradicional com a teoria construtivista. Sete dos que anda não estão em sala de aula ainda, acreditam que terão uma postura construtivista quando estivem lecionando. Um outro acha que manterá uma postura tradicional e cinco, acham que usarão uma mistura das duas anteriores e um não marcou opção.

Quando questionados sobre que metodologias poderiam ser usadas para facilitar a aprendizagem dos alunos, tivemos como resposta, em sua maioria: o uso de jogos, de materiais concretos, de recursos tecnológicos, da modelagem matemática e da resolução de problemas. Podemos perceber, por esses dados iniciais, uma turma mista, com quase 80% jovens com menos de 25 anos e que, em sua maior parte, possuem uma perspectiva de ensino construtivista ou em transição, mas concordam que uma metodologia diferenciada pode facilitar a aprendizagem dos alunos.

As perguntas seguintes desse questionário, possuía três alternativas: sim, não e concordo em parte. A compilação de todas as respostas dadas encontra-se no apêndice A e uma cópia do questionário no apêndice B. Vamos destacar algumas que achamos mais relevantes.

Tabela 3 - Algumas respostas sobre a disciplina de Matemática.

Sobre a disciplina de Matemática acho: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
Que é uma disciplina que tem por objetivo ajudar o aluno a pensar, raciocinar, achar diversos caminhos para resolver problemas;	13	00	01
Desenvolve raciocínio e habilidades que são de grande importância para sua vida pessoal;	13	00	01
Desenvolve raciocínio e habilidades que são de grande importância para sua vida profissional;	13	00	01
Uma excelente maneira de exercitar a mente;	13	00	01
É imprescindível. Faz parte da rotina diária de todos e precisa ser ensinada de acordo com a realidade dos alunos e voltada para a vida;	11	00	03
Importante para o desenvolvimento intelectual;	14	00	00

Fonte: Elaborada pela autora.

Para essas afirmações, quase todos os participantes da pesquisa concordaram que sim, o que vem corroborar com o que encontramos nos PCNEM (2000), como já destacado acima. Alguns concordam e os demais concordam em parte para as questões seguintes:

Tabela 4 - Algumas respostas sobre a disciplina de Matemática.

Sobre a disciplina de Matemática acho: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	Sim	Não	Concordo em parte
Difícil de trabalhar na prática;	01	08	**05**
Difícil dos alunos entenderem sem fazer a conexão com a prática;	06	00	**08**
O professor desta disciplina um ser iluminado;	06	03	**05**
Uma disciplina que deve ser trabalhada inicialmente com o concreto;	08	01	**05**
Que tenho (ou terei) dificuldade de transmitir alguns conteúdos aos alunos;	**03**	**05**	**06**

Fonte: Elaborada pela autora

Sobre a afirmação 'acho que terei dificuldade de transmitir alguns conteúdos aos alunos', seis deles concordam em parte e três afirmaram que sim, as afirmações anteriores nos mostram um pouco da insegurança desses futuros professores com relação a alguns conteúdos de matemática, o que pode prejudicar a aprendizagem dos alunos. Da questão 19 à questão 35, as afirmações versam sobre a relação do aluno com a matemática. Destacamos algumas:

Tabela 5 - Respostas sobre outras opiniões.

Acho que de um modo geral: **(Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)**	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
Acho que os alunos gostam quando o professor trabalha com outras atividades, que não vejam só no caderno (jogos, materiais concretos, experimentos...)	14	00	00
Os alunos gostam de desafios, mas, muitas vezes, predomina o medo à disciplina;	13	00	01
Nas séries iniciais os alunos fazem poucas atividades práticas e de lógica.	09	00	05

Fonte: Elaborada pela autora

As respostas seguintes nos sugere que atividades que desenvolvem a criatividade e o raciocínio são importantes para a aprendizagem nas séries seguintes e assentiram em relação a afirmação que os problemas com a matemática começam nas séries inicias, como podemos perceber na tabela a seguir:

Tabela 6 - Respostas sobre os alunos não gostarem de Matemática.

Acho que de um modo geral os alunos não gostam de Matemática: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
porque precisam pensar, usar o raciocínio.	08	03	03
pois o conteúdo não é dado com criatividade.	08	01	05
os professores não ensinam com metodologia adequada.	03	01	10
porque já tem preconceito com a disciplina e/ou o com o professor.	09	00	05
não tem noções básicas (raciocínio lógico, as quatro operações, etc.), o que dificulta o aprendizado.	10	00	04
não conseguem fazer a ligação entre o conteúdo e a prática.	07	01	06

Fonte: Elaborada pela autora.

Sobre a formação do professor de Matemática e o curso de Licenciatura, tínhamos cinco afirmações que achamos importantes mencionar. Como veremos a seguir:

Tabela 7 - Respostas sobre o curso de Licenciatura.

O curso de Licenciatura em Matemática me: **(Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)**	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
possibilita criar estratégias para facilitar o ensino e aprendizagem dos meus alunos quando estiver atuando.	14	00	00
possibilita refletir sobre a situação atual da disciplina de Matemática nas escolas.	14	00	00
prepara para dar aulas conteudistas.	06	01	07
mostra novas ferramentas didático pedagógicas com possibilidade de aplicação em sala de aula.	13	00	01
torna um professor reflexivo e crítico quanto a minha prática no futuro.	10	00	04

Fonte: Elaborada pela autora.

Essas respostas vão de encontro com objetivo do curso de Licenciatura em Matemática da UERN como podemos verificar abaixo:

> Formar profissional em Matemática apto para o exercício do magistério no ensino fundamental e médio, capaz de exercer uma liderança intelectual, social e política, a partir do conhecimento da nossa realidade social, econômica e cultural, e o conhecimento Matemático nos seus aspectos histórico, filosófico, sociológico, psicológico, político, didático e pedagógico. (UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE, 2006)

Quanto a Geometria Fractal, trouxemos sete tópicos, para os participantes responderem com: conheço, não conheço ou já ouvi falar. Como mostra a tabela:

Tabela 8 - Tópicos sobre Geometria Fractal

Sobre o tema abaixo, eu: **(Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)**	Conheço	Não Conheço	Já ouvi falar
A Teoria do Caos.	06	04	04
A Geometria fractal.	03	11	00
O Conjunto de Cantor	05	07	02
O Conjunto de Mandelbrot	00	12	02
A dimensão fractal	01	11	02
Aplicações da Geometria fractal	00	10	04
A Geometria Fractal como recurso didático	00	10	04

Fonte: Elaborada pela autora

Podemos perceber que 80% dos participantes da pesquisa não conhecem a Geometria Fractal, mas alguns conhecem temas relacionados a ela, ou ainda, sabem pouco sobre o tema ou ouviram falar mais não conhecem a fundo, o que vem a confirmar o que já relatamos anteriormente: que muitos professores ou futuros professores não conhecem e o nosso trabalho poderá apresentá-la e mostrar-lhes algumas possibilidades de sua utilização.

Finalizamos aqui, a análise do questionário inicial e iniciaremos o que pretende o nosso terceiro objetivo. Para isso, vamos analisar as avaliações das oficinas realizadas e as avaliações feitas pelos participantes dos roteiros propostos como recursos didáticos durante as oficinas. Assim, iniciaremos pelos roteiros propostos como recursos didáticos que estão no apêndice C.

5.1. ANÁLISE DOS ROTEIROS DE ATIVIDADES

A exploração dos roteiros de atividades que foram propostos durante a oficina II, nos servirá de introdução para o próximo tópico, visto que, em si, ele constitui apenas uma parte da nossa pesquisa, já que ela é constituída de um conjunto de oficinas, materiais didáticos, questionário e avaliações, formando o corpo do que deve ser aqui analisado. Assim, para essa análise, apresentaremos a avaliação dos cinco roteiros de atividades feita pelos dois grupos formados durante a oficina II, baseando-se nas perguntas apresentadas na tabela:

Quadro 2 - Questões para avaliação dos roteiros

AVALIAÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO
1. A seleção do conteúdo é adequada a série/ano?
2. A sequência com que são apresentados obedece à uma progressão que facilite a aprendizagem do aluno?
3. O tratamento didático dado ao conteúdo, é adequado para série/ano em questão?
4. A linguagem é precisa e clara?
5. O texto das explicações é acessível para os alunos?
6. As atividades se preocupam em ajudar o aluno a construir novos conceitos e/ou reforçar conceitos já conhecidos?
7. Você utilizaria esse material? Justifique.

Fonte: Elaborado pela autora

Os roteiros encontram-se no apêndice C para serem consultados e utilizados, assim como a compilação de todas as respostas dadas. Aqui, faremos uma breve apresentação de cada. A Atividade 1, traz um plano de aula de título “Conhecendo os Fractais” para ser realizado em equipe e que serve de introdução ao assunto tanto para o Ensino Fundamental, quanto para o

Ensino Médio. Os objetivos são: apresentar aos alunos os fractais e entender suas propriedades; diferenciar dos objetos euclidianos; e, os identificar esses e aqueles na natureza.

Para essa atividade, podemos destacar que os integrantes dos grupos a consideraram cabível para utilização e adequada para as séries indicadas, ressaltando que a atividade traz uma abordagem sequenciada e que faz o aluno construir novos conceitos, como constatamos nas falas a seguir:

Grupo I: *A ideia proposta estimula a investigação, bem como exige a associação a conhecimentos conhecidos.*

Grupo II: *A atividade ajuda o aluno a construir novos conhecimentos.*

Eles destacaram que é um material que poderiam utilizar em sala de aula, pois:

Grupo I: *É um material bem elaborado, constituído de boa didática, excelente sequência de abordagem do conteúdo e que estimula a investigação.*

E ressaltam que a apresentação dos fractais principais poderia ser mais detalhada para que possa ser melhor compreendida pelos alunos.

A Atividade II traz uma proposta para o 7º ano do EF e/ou para 1ª série do EM, com título: O Triângulo de Pascal, o Triângulo de Sierpinski e a divisibilidade por 2, 3, 4 e 5. Os objetivos são revisar os múltiplos de 2, 3, 4 e 5, identificar fractais, conhecer o triângulo de Pascal e sua relação com os fractais.

Os dois grupos concordaram em todas as perguntas que a atividade possui os aspectos desejados, como linguagem adequada e clara, sequência lógica, ressaltando que para o EF poderia melhorar a ideia dos padrões para a construção do triângulo de Pascal. Corroboram que é um material que eles utilizariam pois:

Grupo I: *além de trazer uma nova aplicação, reforça conhecimentos anteriores.*

Grupo II: *aumenta o entendimento da divisão nas figuras.*

Na atividade III, o conteúdo abordado é área e o perímetro de um fractal, precisando que os alunos já conheçam esses conceitos, além de fazer os alunos conjecturarem expressões matemáticas para calcular a área e o perímetro em função da medida do lado. Para isso, ela apresenta o fractal Ilha de Koch também conhecido por Floco de Neve, e tem como título, A Ilha de Koch, seu perímetro e sua área, sendo indicada para as 1ª e/ou 2ª séries do EM, de acordo com o nível da turma, assim como as demais propostas.

Os dois grupos concordam que ela é indicada ao EM, pois os alunos já possuem mais maturidade para entender a sequência e formular as expressões matemáticas, e a utilizariam pois ela reforça os conteúdos citados.

Grupo I: *acreditamos que reforça os conceitos já conhecidos além de apresentar o conceito novo (fractal).*

Grupo II: *pois é uma forma de aplicar e reforçar conceitos já conhecidos.*

Para a Atividade IV, os alunos precisam ter como conhecimentos prévios o conceito de sequência, sua lei de formação e progressão aritmética, já que ele apresenta o conceito de Progressão Geométrica, a partir da construção do Conjunto de Cantor com o auxílio de tiras de papel. Ela também é indicada para as 1ª e/ou 2ª séries do EM e tem como título "Progressão Geométrica e o Conjunto de Cantor" com os seguintes objetivos: reconhecer uma progressão geométrica, classificá-la e representá-la. O relato destacado foi:

Grupo II: *É uma nova alternativa metodológica interessante/ Tanto reforça um conhecimento anterior como ajuda a construir novos conhecimentos.*

O que nos faz refletir sobre buscar alternativas para tentar fazer o aluno se interessar pela matemática, sem ser apenas pela exposição oral do conteúdo e resolução de exemplos. A última atividade proposta, traz uma ideia interdisciplinar, entre a Arte e a Matemática, além do uso da tecnologia. O seu título, Arte e Matemática, já nos possibilita mergulhar nessa relação, já que a Matemática nos apresenta uma beleza peculiar e possibilitou os mais variados estilos de arte. Ela é indicada para qualquer série do EM, podendo ser incrementado e transformado em um projeto de Arte envolvendo várias séries ou até mesmo, a escola toda, pois ao final, propõe uma exposição de arte, após uma viagem aos diferentes períodos da história da Arte e a relação de cada período com a Matemática.

Os participantes dos grupos acordaram que é um material que poderia ser utilizado por eles pois traz a interdisciplinaridade e pode despertar ainda mais o interesse do aluno:

Grupo I: *pois desperta o interesse do aluno para a matemática.*

Grupo II: *utilizaria pois, além de trabalhar a interdisciplinaridade, ajuda a revisar e construir conhecimentos novos.*

Desta forma, nessa análise, podemos perceber que os materiais analisados foram bem aceitos pelos participantes dos grupos, por possuir uma linguagem clara, adequada e acessível aos alunos a quem são indicados, podendo cada atividade ser utilizada de forma separada, já que entre elas não há uma sequência de conteúdo e cada uma possui seus conhecimentos prévios. Além de poderem ser aplicados juntamente com as oficinas I e/ou III, ou de acordo com o andamento e nível de cada turma. A seguir, faremos uma análise mais aprofundada das avalições finais, já que serão principalmente a partir delas que tiraremos as conclusões finais do nosso trabalho.

5.2 ANÁLISE DAS AVALIAÇÕES DAS OFICINAS POR CATEGORIAS

Essa análise nos possibilitou criar um panorama geral da nossa pesquisa, visto que, o tópico anterior traz apenas a análise dos roteiros que fazem parte de uma das oficinas. Assim, esperamos constituir reflexões mais profundas sobre nosso objeto de estudo. Ao analisarmos o material mais detalhadamente, destacamos as palavras mais recorrentes nas respostas dadas às 7 perguntas feitas na avaliação, o que nos permitiu discuti-las por meio do método das categorias de Bardin (1977) , que é uma "espécie de gavetas ou rubricas significativas que permitem a classificação dos elementos de significação constitutivas, da mensagem" (BARDIN, 1977, p. 37) .

Portanto, esta "técnica consiste em classificar os diferentes elementos nas diversas gavetas segundo critérios susceptíveis de fazer surgir um sentido" (BARDIN, 1977, p. 37), nos possibilitando analisar, interpretar, fazer associações e buscar identificar os significados do que se encontra escondido. A categorização surgiu a partir das perguntas do questionário e são apresentadas a seguir.

5.2.1 O potencial do material elaborado

As palavras que mais chamaram nossa atenção nessa categoria foram: interessante, dinâmico, gradativo e reforço. Assim, podemos perceber que os participantes acharam que o material utilizado nas oficinas era interessante e dinâmico, que possuem o potencial de reforçar conteúdos matemáticos, e que é apresentado de forma gradativa, como podemos confirmar nas respostas dadas pelos participantes H e L à pergunta 1: O conteúdo das oficinas é interessante? Justifique.

Participante H: *Sim, pois a maioria das atividades são lúdicas e despertam o interesse do aluno por matemática.*

Participante L: *Sim, pois o tema da oficina reforça vários conceitos matemáticos, além de tornar a matemática mais dinâmica.*

Além disso, na pergunta 4, a saber, 'Você acha que o conteúdo “fractais” pode ser abordado em todos os níveis de ensino?', observamos também as palavras acima destacadas:

Participante A: *Sim, pois é um conteúdo interessante que vai despertar o interesse dos alunos.*

Participante H: *Sim, os fractais, podem ser utilizados no ensino básico de uma maneira mais lúdica, no ensino médio, um pouco mais elaborado com a utilização dos softwares.*

Para essa pergunta, alguns participantes, acharam que esse material não deve ser abordado em todos os níveis, por exemplo:

Participante K: *Não. Seria adequado a turma a partir do 8º ano.*

Sendo que o participante F, concorda e destaca que é só fazer uma adequação do conteúdo ao nível de ensino, o que também deve ser feito de acordo com a sala de aula, já que cada uma possui suas peculiaridades:

Participante F: *Sim. Desde que os professores adaptem o conteúdo de acordo com cada nível de ensino.*

Assim, percebemos que as oficinas foram bem recebidas e que podem ser utilizadas em diferentes níveis, desde que haja uma adequação a turma a ser aplicada pois é um material dinâmico e atraente, podendo suscitar o interesse dos alunos.

5.2.2 Tratamento didático do material e sequência utilizada

Nessa categoria, gostaríamos de saber dos participantes se a sequência utilizada foi adequada e se a forma como as oficinas foram apresentadas facilitou a compreensão de todos. Assim, destacamos as seguintes palavras: compreensível, fácil e gradativa, como podemos corroborar a seguir, com algumas respostas dadas a pergunta 2: A sequência com que elas foram apresentadas facilitou sua aprendizagem/compreensão do assunto?

Participante B: *Sim. A construção dos conhecimentos foi gradativa.*

Participante D: *Houve, com a sequência, um aumento gradativo do conhecimento. Acrescentaria um pouco mais de tempo para não ficar tão corrido.*

Participante G: *Sim. Não mudaria, pois ele está fácil de ser compreendido.*

A pergunta 3, 'O tratamento didático dado ao conteúdo ficou compreensivo?', também traz a presença das palavras destacadas nessa categoria:

Participante H: *Sim, é compreensível, porque cada conceito usado junto com a geometria fractal é adequado para série/ano.*

Participante I: *Tanto compreensivo, quanto fácil/bom de se trabalhar*.

Na pergunta 7, 'O tempo para a realização das oficinas foi suficiente para a compreensão geral da atividade proposta?', alguns alunos também usaram as palavras que destacamos:

Participante E: *Com certeza, foi suficiente parar compreender.*

Participante L: *Sim, pois a linguagem foi bastante acessível e de rápida compreensão*.

Mas para essa mesma pergunta, apesar das oficinas terem sido compreensivas, dois participantes destacaram que era melhor um pouco mais de tempo, que também apareceu na resposta dada pelo mesmo participante, quando respondeu à pergunta 2, já citada acima:

Participante D: *Teve a compreensão, mas acredito que um pouco mais de tempo facilitaria.*

Participante J: *Não. Acredito que faltou um pouco de tempo para assimilar cada oficina, por isso compreender, ficou um pouco difícil em certos casos*.

Desta forma, podemos verificar que o tempo para a realização das oficinas poderia ter sido um pouco maior, proporcionado aos participantes uma melhor compreensão das oficinas e roteiros.

5.2.3 Os fractais e a formação do professor de Matemática

Para essa categoria selecionamos quatro palavras: conhecimento, novo, metodológica e reforço. Com elas, percebemos a ênfase dada ao uso da geometria fractal tanto como contribuição para sua formação como para que ela estivesse presente no curso de Licenciatura, pois é um conhecimento novo e pode auxiliar na construção de outros conhecimentos. Observamos isso nas respostas dadas às perguntas 5 e 6, que comentaremos agora. Para a pergunta 5, que dizia 'Você acha que essas oficinas contribuíram para sua formação como professor? De que forma?', destacamos o que os participantes B, F, G e I relataram:

Participante B: *Sim. Me acrescentou conhecimentos e, de certa forma, aumentou meu raciocínio lógico e despertou meu espírito de pesquisa e de busca.*

Participante F: *Sim. Pois seria uma nova forma de apresentar determinado conteúdo.*

Participante G: *Sim. Na forma de levar novos conhecimentos para os alunos, na qual tornaria as aulas mais dinâmicas e também poderá reforçar conteúdos nos quais, eles já devem ter visto.*

Participante I: *Sim, construindo e melhorando minha forma de lecionar, acrescentando conhecimento a minha formação*.

Ao considerarmos essas respostas, vamos ao encontro do que buscávamos no início de nossa pesquisa, discutir, a partir da opinião dos futuros professores, as potencialidades do uso da geometria fractal em sala de aula. O relato deixado na fala do participante B, nos mostra um despertar de sentimento que deveria estar presente em toda nossa vida acadêmica, o espírito de pesquisa e busca, seja por mais formação ou por novas informações, seja por novas formas de conquistar os alunos para se abrirem a construção de novos conhecimentos.

Para a pergunta 6, 'Como aluno de licenciatura você acha que os professores poderiam abordar esse assunto nas aulas de graduação? Por quê?', achamos importante destacar as respostas dadas pelos participantes a seguir:

Participante A: *Sim, para tornar as aulas mais dinâmicas e apresentar esse tipo de geometria aos licenciados*

Participante B: *Talvez. Como uma complementar. Pois ajuda a compreensão de muitos conteúdos.*

Participante K: *Poderiam, como meio de curiosidade e aplicação de alguns conceitos.*

Notamos que os participantes apontam para a possibilidade da Geometria Fractal está presente no curso de Licenciatura, mostrando que ela tem o potencial de tornar as aulas mais dinâmicas, ajudar na compreensão e aplicação de conteúdos, ou pelo menos, fazer parte da ementa das disciplinas que possibilitam discussões sobre novos materiais, didática, novas ferramentas metodológicas, ferramentas essas que tem como principais objetivos facilitar o processo de ensino-aprendizagem e atrair a atenção do aluno, fazendo a matemática mais compreensível.

Apesar da maioria concordar quanto a abordagem do tema no curso de licenciatura, alguns discordam, argumentar que já existir muito conteúdo para ser estudado, e aí, não daria tempo para mais um, ou ainda, por considerar que ela deve ser apresentada só como curiosidade no ensino médio. Mas, como destacado pelo participante K, no curso de licenciatura já poderia vir como aplicação de algum conteúdo estudado.

Desta forma, podemos, a partir das análises feitas tanto das avaliações dos roteiros quanto das avaliações das oficinas, que a Geometria Fractal como recurso didático possui potencial metodológico para ser utilizado em sala de aula e ainda pode ser um possível elemento a ser incorporado nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Assim, acreditamos que conseguimos alcançar nosso objetivo geral, visto que, os três objetivos específicos foram alcançados, pois constituímos um panorama das pesquisas brasileiras, em níveis de mestrado e doutorado, que abordam a Geometria Fractal como estratégia de ensino na formação de professores de matemática, desenvolvemos as oficinas e analisamos os roteiros de atividades explorando a Geometria Fractal com os futuros professores e a partir deles, observamos e apontamos as potencialidades do uso da Geometria Fractal, em uma perspectiva interdisciplinar, na formação de professores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização cada vez maior da geometria fractal em diversas áreas do conhecimento nos faz perceber a religação de conteúdo que até pouco tempo foram esmiunçados e estudados separadamente, despertando assim, um interesse maior pela interdisciplinaridade. Esse trabalho nos possibilitou observar o leque de conexões existente nesse tema e ainda, desenvolver materiais que podem possibilitar a melhoria da aprendizagem principalmente de matemática em sala de aula, contemplando o que os PCNs vem destacando a algum tempo, ou seja,

> apontar para um planejamento e desenvolvimento do currículo de forma orgânica, superando a organização por disciplinas estanques e revigorando a integração e articulação dos conhecimentos, num processo permanente de interdisciplinaridade e transdisciplinaridade (BRASIL, 2000, p. 17)

Para esse processo acontecer é preciso abandonar os moldes convencionais e pensar numa desordem do processo, sair das disciplinas estanques e perpassar umas pelas outras, o que compila com as ideias de Fazenda (2008) que propõe que "um olhar interdisciplinarmente atento recupera a magia das práticas, a essência de seus movimentos, mas, sobretudo, induz-nos a outras superações, ou mesmo reformulações" (FAZENDA, 2008, p. 13), como o exercício de uma atitude ambígua, e "navegar na ambiguidade exige aceitar a loucura que a atividade interdisciplinar desperta e a lucidez que ela exige" (FAZENDA, 2008, p. 13).

Assim, como visto no desenvolvimento desse trabalho, buscamos discutir o ensino e aprendizagem de matemática com o uso de materiais que utilizavam como suporte a geometria fractal e a interdisciplinaridade. Desta forma, entendemos que nosso trabalho alcançou o que almejava, numa perspectiva de "conhecer para transformar" (PAULON, 2005, p. 22), apresentando e discutindo com os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UERN na disciplina Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II do 5º período, o potencial do material produzido.

Observamos que durante a pesquisa os participantes compartilharam de uma curiosidade aguçada sobre o assunto, sobre a vasta aplicabilidade dessa geometria, sobre as atividades desenvolvidas, principalmente quando usamos materiais concretos como as fotos de fractais, o uso de software para construção de fractais, os vídeos. O que nos ajudou a responder um dos questionamentos que trazemos na introdução: Que contribuições a Geometria Fractal pode trazer para a formação de alunos de Licenciatura em Matemática? *Despertar o espírito de pesquisa e de busca*, como descreve o participante B.

Sobre o segundo questionamento: Como a Geometria Fractal pode ser abordada no Ensino Médio de forma interdisciplinar? Entendemos que ela deve despertar a criatividade do professor e a ousadia, juntando-se a professores de outras disciplinas com o intuito de desenvolver projetos que possam buscar na interdisciplinaridade um reforço a mais para o processo de ensino.

Já o terceiro questionamento: Qual a opinião dos licenciandos sobre as propostas de abordagem apresentadas e se, para eles, elas podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem? Entendemos que a maioria concorda com a abordagem dada e corroboram que ela pode ser trabalhada em diferentes níveis de ensino desde que passe por adequações para cada nível.

Entendemos ainda que, em sua profundidade, esse tema se torna um pouco mais complicado pois se utiliza de uma matemática mais profunda e que necessita de uma parcela de conhecimento maior que muitos leigos não conseguiriam compreender sem debruçar-se de forma mais incisiva. Mas, como o propósito final nesse trabalho é que ele seja utilizado na educação básica, o abordamos de forma mais superficial. Entendemos também, que não trazemos soluções únicas e totalmente assertivas dos problemas aqui discutidos, porque seria ousadia de nossa parte frente a um desafio tão grande, ensinar e aprender.

É importante ressaltar ainda que acreditamos que uso desse material pode proporcionar o desenvolvimento de competências e habilidades dos alunos da educação básica, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar, sendo o professor o mediador entre o aluno e o conhecimento. Ele também traz uma Matemática aplicável, fazendo o aluno perceber e reconhecer formas e processos que envolvem conceitos matemáticos como o de perímetro, área, volume e ainda a ideia de padrões e escalas, passando por várias áreas do conhecimento, mas em destaque aqui, as artes.

Assim, deixamos aos professores que buscam melhorar sua prática tornando-se o mediador do processo ensino/aprendizagem, o desejo de que possam usufruir desse trabalho e que ele contribua para o desenvolvimento de suas aulas, tornando-as mais atrativas e promovendo situações de aprendizagens significativas. A nós deixamos o desafio de compilar essas atividades e outras advindas de mais pesquisa em um livreto, quem sabe?

Por fim, acreditamos que para termos uma aprendizagem significativa é preciso que o ensino e aprendizagem passem por transformações e que é necessário que materiais desse tipo sejam criados e/ou apresentados e discutidos com professores da educação básica, em sua formação inicial ou continuada. É preciso que o professor seja também pesquisador de sua prática, é preciso que teoria e prática andem juntas, e como traz D'Ambrósio (2000), "se as teorias vêm do conhecimento acumulado ao longo do passado e os efeitos da prática vão se manifestar no futuro, o elo entre teoria e prática deve se dar no presente, na ação, na própria prática. E isso nos permite conceituar *pesquisa* como o elo entre teoria e prática" (D'AMBRÓSIO, 2000, p. 80, grifo do autor), objetivo maior desse trabalho, elencar a teoria e a prática.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, A. T. de *et al*. Interdisciplinaridade e transdisciplinaridade nas tramas da complexidade e desafios aos processos investigativos. *In*: PHILIPPI JR, A.; FERNANDES, V. (ed.). **Práticas da interdisciplinaridade no ensino e na pesquisa**. São Paulo: Manole, 2015. cap. 2, p. 37-89.

ALVES, Adriana. Interdisciplinaridade e matemática. *In*: FAZENDA, Ivani (org.). **O Que é interdisciplinaridade?** São Paulo: Cortez, 2008. p. 97-111.

ANDRADE JUNIOR, Edmilson Alves de **Ciência contemporânea na formação de professores**: o caso dos fractais em uma perspectiva kellyana. 2015. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

ARAÚJO, Anderson Tadeu Gonçalves de. **Noções de geometria fractal elementar**. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2014.

BALDOVINOTTI, Nilson Jorge. **Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática**. 2011, 204 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal**: para a sala de aula. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 1977.

BATISTA, Bárbara Regina da Silveira. **Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciandos em Matemática**. 2017. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017.

BATISTA, João Lucas de Paula. **Uma proposta de ensino de acústica a partir da análise dos timbres de instrumentos musicais do samba**. 2016. 107 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

BEVILAQUA, Aluísio Pampolha. **A crise orgânica do capital**: o valor, a ciência, e a educação. 2015. 418 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Ceará, 2015.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Tradução de Maria João Sara dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.Pdf. Acesso em: 27 maio. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 27 maio 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Nacional PISA 2012**. Brasília, DF: MEC, 2012. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/guest/acoes-internacionais/pisa/resultados. Acesso em: 19 nov. 2019.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Brasil no PISA 2018**. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf. Acesso em: 16 jan. 2020.

CASTILHOS, Thiago Barcelos. **Possibilidades pedagógicas para introdução de "fractal" no ensino básico e na formação de professores de matemática**. 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2014.

COELHO, João Batista. **Geometria Fractal**: um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do ensino médio. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, Tocantins, 2015.

CORRÊA, Augusto de Oliveira. **Geometria Fractal no Ensino Médio**. 2014. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Amapá, 2014.

CORTEZ, Margarida de Jesus; ACCIOLY, Denise Cortez da S. (org.). **A formação do professor na perspectiva transdisciplinar**: o paradigma para a educação do século XXI. São Paulo: All Print Editora, 2012.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 6. ed. Campinas: Papirus, 2000.

ELI, Juliano. **Números complexos e suas aplicações**: uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica. 2014. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Regional de Blumenau, Santa Catarina, 2014.

THE FRACTALS at the heart of African designs. Produção: TED Global. Palestrante: Ron Eglash, Nova York, 2007. Disponível em: https://www.ted.com/talks/ron_eglash_on_african_fractals. Acesso em: 11 out. 2018.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FARIA, José Henrique de. Epistemologia Crítica, metodologia e interdisciplinaridade. *In*: PHILIPPI JR, Arlindo; FERNANDES, V. (ed.). **Práticas da interdisciplinaridade no ensino e pesquisa**. Barueri: Manole, 2015. cap. 3, p. 91-135.

FAZENDA, Ivani (org.). **Didática e interdisciplinaridade**. 13. ed. Campinas: Papirus, 2008.

FAZENDA, Ivani. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro**: efetividade ou ideologia. 6. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GLEICK, James. **Caos**: a criação de uma nova ciência. Tradução de Woltensir Dutra. Rio de Janeiro: Elsevier, 1989.

GRESSLER, Marcia Denise. **Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais.** 2008. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GOUVEA, Flávio Roberto. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio e softwares de geometria dinâmica**. 2005. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Resultados do Saeb 2017**. [Brasília, DF]: Medium, 2017. Disponível em: https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d. Acesso em: 16 nov. 2019.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

JAPIASSU, Hilton**. Interdisciplinaridade e a patologia do saber**. Rio de Janeiro: Imago editora, 1976.

JORGE, L. A. C. *et al*. **Aplicação da técnica multifractal para caracterização de manejo de solo.** São Carlos: Embrapa, 2008.

KENSKI, Rafael. A natureza em telas. **Super interessante**, São Paulo, 31 out. 2016. Disponível em: https://super.abril.com.br/ideias/a-natureza-em-telas/. Acesso em: 20 jan. 2020.

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MANDELBROT, Benoit B**. The fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman, 1977.

MILANI, Samanta Margarida. **Fractais, pipas tetraédricas e origami**: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria. 2016. 126 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

MINGORANCI, Simone. **A Geometria Fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhora no processo ensino/aprendizagem da Matemática na Educação Básica**. 2014. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2014.

MOREIRA, Marco A. Pesquisa em educação em ciências: métodos qualitativos. MOREIRA, Marco A.; ROSA, Paulo R. S. **Pesquisa em ensino**: métodos qualitativos e quantitativos. Porto alegre: [*s. n.*], 2016. cap. 1, p. 5-31. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios11.pdf. Acesso em: 23 abr. 2018.

MORIN, Edgar. **Educação e Complexidade**: os sete saberes e outros ensaios. ALMEIDA, Maria da Conceição de; CARVALHO, Edgard de Assis (org.). 4. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e aplicações**. 2006. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2006.

OLIVEIRA, Alessandro *et al.* **Fractais L-systems**: computação natural. Minas Gerais: UFMG, 2014. Disponível em: https://slideplayer.com.br/slide/42753/. Acesso em: 26 maio 2020.

PAULON, Simone Mainieri. A análise de implicação como ferramenta na pesquisa-intervenção. **Psicologia & Sociedade**, Porto Alegre, v. 17, n. 3, p. 18-25, set/dez. 2005. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/psoc/v17n3/a03v17n3.pdf. Acesso em: 13 dez. 2019.

PIMENTA, Selma Garrido. Professor reflexivo: construindo uma crítica. *In*: PIMENTA, Selma Garrido; GHEDIN, Evandro (org.). **Professor reflexivo no Brasil**: gênese e crítica de um conceito. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2006, p. 17-52.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da geometria fractal**. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

RICHARDSON, Roberto Jarry. **Pesquisa social**: métodos e técnicas. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; ENS, Romilda Teodora. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Revista Diálogo Educacional**, Paraná, v. 6, n. 19, p. 37-50, 2006. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=189116275004. Acesso em: 14 mar. 2020.

SANTOS, Claudio Xavier Mendes dos. **Circuitos resistivos autossimilares.** 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

SWIDERSKI, Sandro Adir. **O estudo de alguns aspectos da geometria fractal.** 2015. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Cuiabá, 2015.

TAYLOR, Richard. **The facts about Pollock's fractals**. Eugene, 4 Jan. 2017. Disponível em: https://blogs.uoregon.edu/richardtaylor/2017/01/04/the-facts-about-pollocks-fractals/. Acesso em: 20 jan. 2020.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/v31n3.pdf. Acesso em: 15 maio 2018.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE. **Matriz curricular do curso de matemática**. Mossoró: UERN: FANAT, 2006. Disponível em: http://www.uern.br/cursos/servico.asp?fac=FANAT&cur_cd=1011200&grd_cd=20061&cur_nome=Matem%E1tica&grd_medint=8&item=curso. Acesso em: 23 nov. 2019.

ZEICHNER, Kenneth M. Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno: possibilidades e contradições. *In*: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (org.). **Formação de educadores**: desafios e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 2003.

APÊNDICE A – COMPILAÇÃO DAS RESPOSTAS DADAS PELOS PARTICIPANTES AO QUESTIONÁRIO INICIAL.

Questões relacionadas a disciplina Matemática

Sobre a disciplina de Matemática acho: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
7. Difícil de trabalhar na prática;	01	08	05
8. Que é uma disciplina que tem por objetivo ajudar o aluno a pensar, raciocinar, achar diversos caminhos para resolver problemas;	13	00	01
9. Desenvolve raciocínio e habilidades que são de grande importância para sua vida pessoal;	13	00	01
10. Desenvolve raciocínio e habilidades que são de grande importância para sua vida profissional;	13	00	01
11. Fundamental no dia-a-dia das pessoas;	13	00	01
12. Uma excelente maneira de exercitar a mente;	13	00	01
13. Difícil dos alunos entenderem sem fazer a conexão com a prática;	06	00	08
14. O professor desta disciplina um ser iluminado;	06	03	05
15. Que tenho (ou terei) dificuldade de transmitir alguns conteúdos aos alunos;	03	05	06
16. É imprescindível. Faz parte da rotina diária de todos e precisa ser ensinada de acordo com a realidade dos alunos e voltada para a vida;	11	00	03
17. Uma disciplina que deve ser trabalhada inicialmente com o concreto;	08	01	05
18. Importante para o desenvolvimento intelectual;	14	00	00

Relação aluno e a disciplina de Matemática

Acho que de um modo geral: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
19. Os alunos não gostam da disciplina de Matemática.	05	01	08
20. Quando os alunos aprendem realmente, eles gostam;	11	00	03
21. Os alunos não têm motivação para aprender Matemática;	05	02	07
22. Acho que os alunos gostam quando o professor trabalha com outras atividades, que não vejam só no caderno (jogos, materiais concretos, experimentos...)	14	00	00
23. Os alunos gostam de desafios, mas, muitas vezes, predomina o medo à disciplina;	13	00	01
24. Nas séries iniciais os alunos fazem poucas atividades práticas e de lógica.	09	00	05

Acho que de um modo geral os alunos não gostam de Matemática: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
25. porque precisam pensar, usar o raciocínio.	08	03	03
26. pois o conteúdo não é dado com criatividade.	08	01	05
27. os professores não ensinam com metodologia adequada.	03	01	10
28. porque já tem preconceito com a disciplina e/ou o com o professor.	09	00	05
29. não tem noções básicas (raciocínio lógico, as quatro operações, etc.), o que dificulta o aprendizado.	10	00	04
30. não conseguem fazer a ligação entre o conteúdo e a prática.	07	01	06

Os problemas dos alunos com a Matemática iniciam: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
31. quando eles têm que partir para o abstrato e o concreto não foi bem trabalhado.	11	01	02
32. na sua entrada na escola, quando o aluno não consegue ligar o conteúdo a prática do seu dia-a-dia.	10	00	04
33. nas séries iniciais, se não formarem uma boa base.	14	00	00
34. quando não aprendem a tabuada (as quatro operações).	12	00	02
35. é muito relativo, cada caso é um caso.	07	00	07

Formação de professores e o curso de Licenciatura

O curso de Licenciatura em Matemática me: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
36. possibilita criar estratégias para facilitar o ensino e aprendizagem dos meus alunos quando estiver atuando.	14	00	00
37. possibilita refletir sobre a situação atual da disciplina de Matemática nas escolas.	14	00	00
38. prepara para dar aulas conteudistas.	06	01	07
39. mostra novas ferramentas didático pedagógicas com possibilidade de aplicação em sala de aula.	13	00	01
40. torna um professor reflexivo e crítico quanto a minha prática no futuro.	10	00	04

Os fractais

Sobre o tema abaixo, eu: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Conheço**	**Não Conheço**	**Já ouvi falar**
41. A Teoria do Caos.	06	04	04
42. A Geometria fractal.	03	11	00

43. O Conjunto de Cantor	05	07	02
44. O Conjunto de Mandelbrot	00	12	02
45. A dimensão fractal	01	11	02
46. Aplicações da Geometria fractal	00	10	04
47. A Geometria Fractal como recurso didático	00	10	04

APÊNDICE B – CÓPIA DO QUESTIONÁRIO INICIAL.

Cópia do Questionário

Caro participante,
Este questionário tem o intuito de coletar dados para serem utilizados em uma pesquisa de Mestrado. Não é necessário identificar-se. Em hipótese alguma, serão citados na dissertação dados pessoais. Gostaríamos de contar com a sua sincera participação.

Questões pessoais
1. Idade: _________ anos
2. Sexo: (   ) M ou (   ) F
3. Está lecionando: (   ) Sim   (   ) Não
Se **sim**, responda à questão 4. Caso, a resposta seja não pode pular para a questão 5.
4. Considerando que toda prática pedagógica contém pressupostos teóricos implícitos. Como você vê a sua atuação como professor? ( ) Construtivista ( ) Tradicional ( ) Uma mistura das anteriores ( ) Outra. Qual? ____
5. Como você vê a sua atuação como futuro professor? ( ) Construtivista ( ) Tradicional ( ) Uma mistura das anteriores ( )Outra. Qual? ____
6. Cite algumas metodologias que você considera que podem ser usadas nas aulas de matemática?
____
____

Questões relacionadas a disciplina Matemática

Sobre a disciplina de Matemática acho: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
7. Difícil de trabalhar na prática;	(A)	(B)	(C)
8. Que é uma disciplina que tem por objetivo ajudar o aluno a pensar, raciocinar, achar diversos caminhos para resolver problemas;	(A)	(B)	(C)
9. Desenvolve raciocínio e habilidades que são de grande importância para sua vida pessoal;	(A)	(B)	(C)
10. Desenvolve raciocínio e habilidades que são de grande importância para sua vida profissional;	(A)	(B)	(C)
11. Fundamental no dia-a-dia das pessoas;	(A)	(B)	(C)
12. Uma excelente maneira de exercitar a mente;	(A)	(B)	(C)
13. Difícil dos alunos entenderem sem fazer a conexão com a prática;	(A)	(B)	(C)
14. O professor desta disciplina um ser iluminado;	(A)	(B)	(C)
15. Que tenho (ou terei) dificuldade de transmitir alguns conteúdos aos alunos;	(A)	(B)	(C)
16. É imprescindível. Faz parte da rotina diária de todos e precisa ser ensinada de acordo com a realidade dos alunos e voltada para a vida;	(A)	(B)	(C)
17. Uma disciplina que deve ser trabalhada inicialmente com o concreto;	(A)	(B)	(C)

18. Importante para o desenvolvimento intelectual;	(A)	(B)	(C)

Relação aluno e a disciplina de Matemática

Acho que de um modo geral: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
19. Os alunos não gostam da disciplina de Matemática.	(A)	(B)	(C)
20. Quando os alunos aprendem realmente, eles gostam;	(A)	(B)	(C)
21. Os alunos não têm motivação para aprender Matemática;	(A)	(B)	(C)
22. Acho que os alunos gostam quando o professor trabalha com outras atividades, que não vejam só no caderno (jogos, materiais concretos, experimentos...)	(A)	(B)	(C)
23. Os alunos gostam de desafios, mas, muitas vezes, predomina o medo à disciplina;	(A)	(B)	(C)
24. Nas séries iniciais os alunos fazem poucas atividades práticas e de lógica.	(A)	(B)	(C)

Acho que de um modo geral os alunos não gostam de Matemática: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
25. porque precisam pensar, usar o raciocínio.	(A)	(B)	(C)
26. pois o conteúdo não é dado com criatividade.	(A)	(B)	(C)
27. os professores não ensinam com metodologia adequada.	(A)	(B)	(C)
28. porque já tem preconceito com a disciplina e/ou o com o professor.	(A)	(B)	(C)
29. não tem noções básicas (raciocínio lógico, as quatro operações, etc.), o que dificulta o aprendizado.	(A)	(B)	(C)
30. não conseguem fazer a ligação entre o conteúdo e a prática.	(A)	(B)	(C)

Os problemas dos alunos com a Matemática iniciam: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
31. quando eles têm que partir para o abstrato e o concreto não foi bem trabalhado.	(A)	(B)	(C)
32. na sua entrada na escola, quando o aluno não consegue ligar o conteúdo a prática do seu dia-a-dia.	(A)	(B)	(C)
33. nas séries iniciais, se não formarem uma boa base.	(A)	(B)	(C)
34. quando não aprendem a tabuada (as quatro operações).	(A)	(B)	(C)
35. é muito relativo, cada caso é um caso.	(A)	(B)	(C)

Formação de professores e o curso de Licenciatura

O curso de Licenciatura em Matemática me: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Sim**	**Não**	**Concordo em parte**
36. possibilita criar estratégias para facilitar o ensino e aprendizagem dos meus alunos quando estiver atuando.	(A)	(B)	(C)
37. possibilita refletir sobre a situação atual da disciplina de Matemática nas escolas.	(A)	(B)	(C)
38. prepara para dar aulas conteudistas.			
39. mostra novas ferramentas didático pedagógicas com possibilidade de aplicação em sala de aula.	(A)	(B)	(C)
40. torna um professor reflexivo e crítico quanto a minha prática no futuro.	(A)	(B)	(C)

Os fractais

Sobre o tema abaixo, eu: (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada linha)	**Conheço**	**Não Conheço**	**Já ouvi falar**
41. A Teoria do Caos.	(A)	(B)	(C)
42. A Geometria fractal.	(A)	(B)	(C)
43. O Conjunto de Cantor	(A)	(B)	(C)
44. O Conjunto de Mandelbrot	(A)	(B)	(C)
45. A dimensão fractal	(A)	(B)	(C)
46. Aplicações da Geometria fractal	(A)	(B)	(C)
47. A Geometria Fractal como recurso didático	(A)	(B)	(C)

Observação:

APÊNDICE C – PROPOSTAS DE ROTEIRO DE ATIVIDADES AVALIADOS

ATIVIDADE 1 – INDICAÇÃO: Ensino Fundamental e Médio.

TÍTULO: CONHECENDO OS FRACTAIS (Atividade em equipes)

OBJETIVO GERAL
Conhecer os fractais e suas propriedades e diferenciá-los dos objetos euclidianos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Conhecer os fractais e entender suas propriedades;
- Diferenciar os objetos fractais dos objetos euclidianos;
- Identificar fractais na Natureza.

MATERIAL NECESSÁRIO

- Projetor, slides com figuras de fractais naturais e de fractais gerados por computador e de objetos euclidianos e um computador;
- As mesmas figuras dos slides impressas ou outras com mesmas características (as figuras devem ser reproduzidas para cada equipe ou essa primeira parte pode ser feita no grupo. As figuras podem ser: o triângulo de Sierpinski em dois níveis diferentes, a ilha de Koch em dois níveis diferentes, partes do conjunto de Mandelbrot ou do conjunto de Julia, um quadrado e um círculo, ou esfera, ou ainda figuras que os lembre, a foto de uma couve, de uma flor ou de uma árvore, samambaia);
- Roteiro por equipes ou o professor pode ser o condutor da atividade.

Observação: a 5ª e a 6ª questão do roteiro deve ser mediada pelo professor e para finalizar ele pode concordar ou refutar as conclusões dos alunos. Depois dos alunos resolverem a 6ª questão o professor deverá mostrar slides de outros fractais para fazer a divisão por equipes, para resolução da 7ª questão (neste caso, o conjunto de Cantor, a curva de Hilbert, a curva de Peano e etc., uma curva para cada equipe que poderá ser apresentada na forma de seminário na aula seguinte).

ROTEIRO

TÍTULO: CONHECENDO OS FRACTAIS

1. Observe as figuras (solicitadas no material) e separe-as a partir de algum critério.
2. Escreva o critério utilizado por sua equipe.

____
____
____

3. Para cada grupo de figuras que você separou, tente escrever as características comuns entre elas.

____
____
____
____

4. Compare-o com o critério das outras equipes e observe se as figuras foram separadas da mesma forma.

5. Discuta com seus colegas as igualdades e diferenças encontradas por cada equipe. (O professor vai mediar essa discussão)

6. Como você definiria um fractal?

____
____
____

7. Para casa: Cada equipe deverá pesquisar sobre um fractal. Identificar seu criador, quando foi criado e como podemos construí-lo.

ATIVIDADE 2 – INDICAÇÃO: 7º Ano do EF, 1ª Série EM

TÍTULO: O TRIÂNGULO DE PASCAL, O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A DIVIBILIDADE POR 2, 3, 4 E 5. (Atividade individual)

OBJETIVO GERAL

Revisar os conceitos de divisibilidade com o auxílio de um fractal, o Triângulo Sierpinski, e do Triângulo de Pascal.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar os divisores de 2, 3, 4 e 5;
- Conhecer e identificar os Fractais;
- Conhecer o Triângulo de Pascal e verificar se em sua estrutura pode-se encontrar fractais.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Dominar as quatro operações;
- Compreender o significado de divisibilidade.

MATERIAL NECESSÁRIO

- 2 Folhas de ofício para cada aluno;
- Uma cópia do triângulo de Pascal;
- Lápis de cor;
- Roteiro.

ROTEIRO – ATIVIDADE 2

TÍTULO: O TRIÂNGULO DE PASCAL, O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E A DIVIBILIDADE POR 2, 3, 4 E 5.

1. Preencha o triângulo ao lado, utilizando a seguinte regra: iniciando por 1, adicione dois números consecutivos de uma linha para determinar o valor da célula da linha abaixo. (No caso das aulas

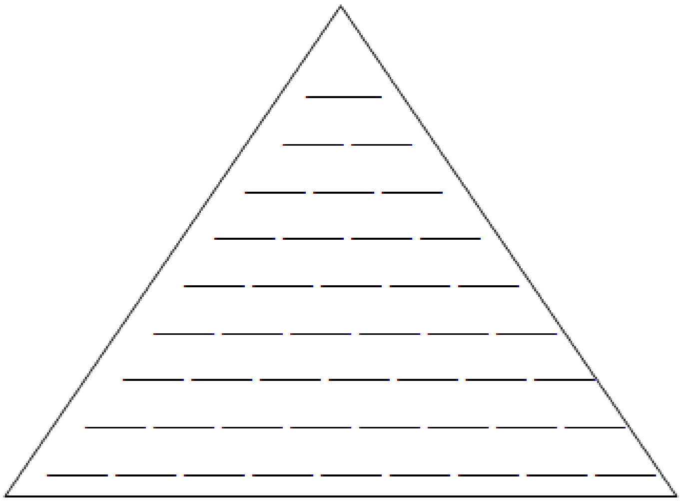


Figura 17: Construção do Triângulo de Pascal.[13]

2. O triângulo acima é conhecido como Triângulo de Pascal. Pinte todos os números ímpares desse triângulo. O que se pode observar?

3. Tente encontrar uma regra que indique que células de uma linha devem ser pintadas, em função das células pintadas na linha anterior.

4. Aplique em cada um dos Triângulos abaixo a regra que você determinou. (Obs.: a regra só deve ser aplicada aos triângulos com a base embaixo)

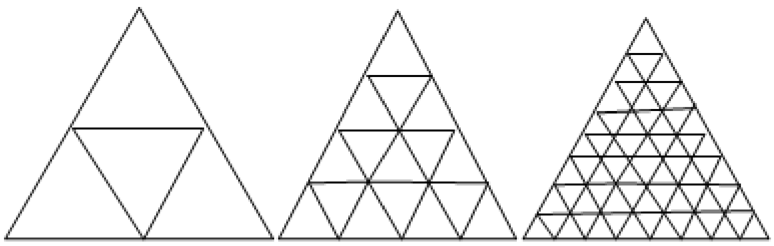


Figura 2: Triângulo de Sierpinski.[14]

O que você observou?

[13] Figura Criada pela autora.
[14] Figura criada pela autora.

5.Pinte todos os números divisíveis por 3.

Regra de divisibilidade por 3: um número é divisível por 3, quando a soma dos algarismos que o formam for divisível por 3.

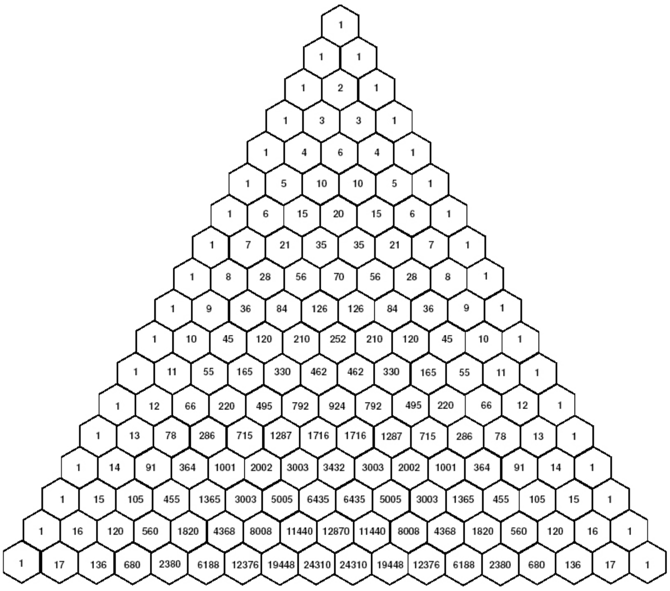


Figura 3: Triângulo de Pascal 2.[15]

6. Pinte todos os números divisíveis por 4.

Regra de divisibilidade por 4: um número é divisível por 4, quando o número terminar em 00, ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4.

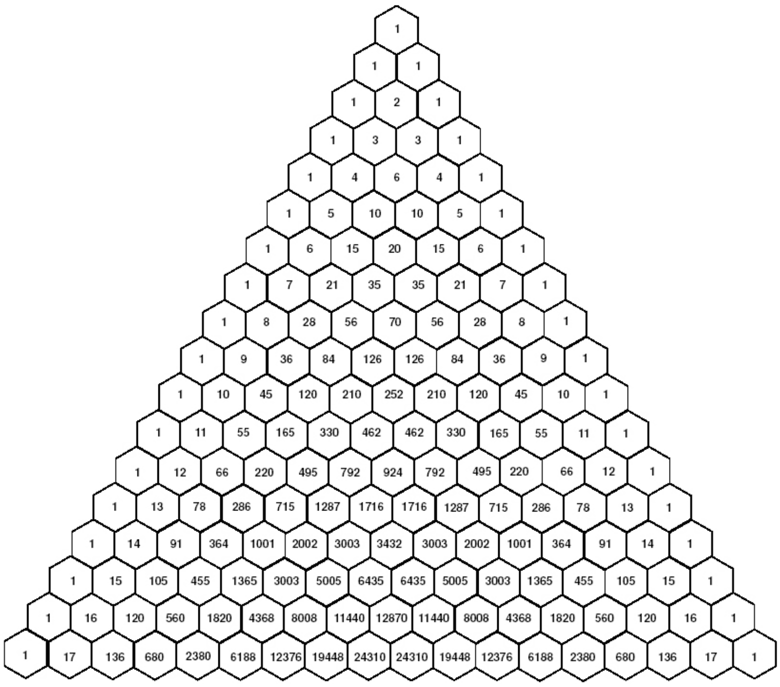


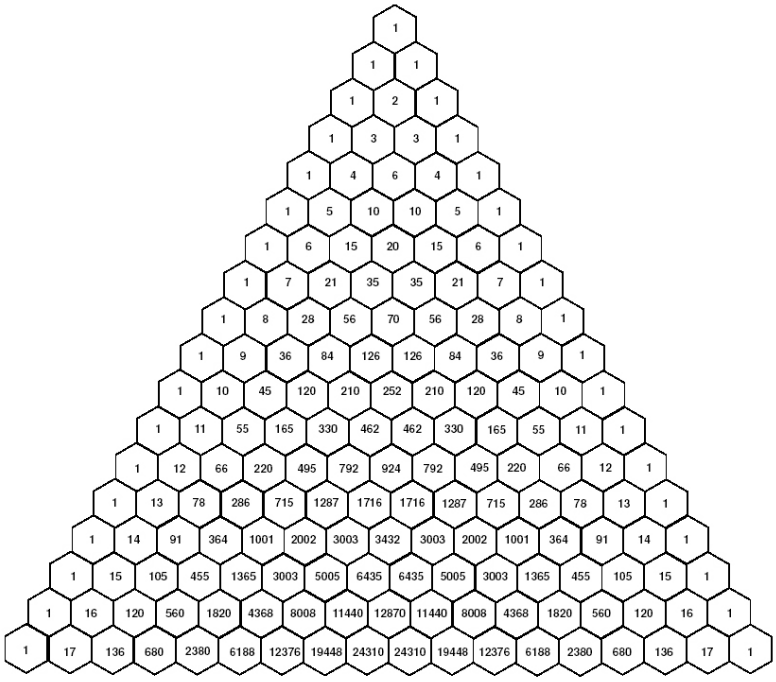
Figura 4: Triângulo de Pascal 2.[16]

[15] Disponível em http://www.esb.ucp.pt/twt4/motor/display_texto.asp?pagina=fractais&bd=nonio_mm, Acessado em 23/04/2011 às 16h40min.
[16] Disponível em http://www.esb.ucp.pt/twt4/motor/display_texto.asp?pagina=fractais&bd=nonio_mm, Acessado em 23/04/2011 às 16h40min.

7. Pinte todos os múltiplos de 5.

Regra de divisibilidade por 5: um número é divisível por 5, quando seu último algarismo for 0 ou 5.

Figura 5: Triângulo de Pascal 2.[17]



8. As figuras geradas podem ser consideradas fractais? Por quê?__________

____

____

9. Faça um pequeno resumo sobre o que você aprendeu nessa aula.

____

____

____

____

____

____

____

ATIVIDADE 3 – INDICAÇÃO: 1ª e /ou 2ª Séries do Ensino Médio.

TÍTULO: A ILHA DE KOCH (OU FLOCO DE NEVE), SEU PERÍMETRO E SUA ÁREA. (Atividade Individual)

OBJETIVO GERAL
Determinar a área e o perímetro da Ilha de Koch a cada nível.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Construir a ilha de Koch em vários níveis;
- Determinar o perímetro do nível 0(zero) ao nível 3;
- Determinar a área do nível 0(zero) ao nível 3.

[17] Disponível em http://www.esb.ucp.pt/twt4/motor/display_texto.asp?pagina=fractais&bd=nonio_mm, Acessado em 23/04/2011 às 16h40min.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS
- Cálculo de perímetros;
- Cálculo da área do triângulo equilátero.
- Função e Equação exponencial.

MATERIAL NECESSÁRIO
- Folhas de ofício; lápis e borracha;
- Calculadora científica;
- Roteiro de atividade.

Observação: se a atividade for proposta a alunos do ensino fundamental o professor deverá fazer algumas modificações, como por exemplo fixar a medida do lado do triângulo.

ROTEIRO - ATIVIDADE 3

TÍTULO: A ILHA DE KOCH (OU FLOCO DE NEVE), SEU PERÍMETRO E SUA ÁREA.

1. Desenhe, na tabela, a Ilha de koch como indicado abaixo:
Para a construção da Curva de Koch, deve-se seguir os passos abaixo:
1.1. (nível 0) Desenhe um triângulo equilátero;
1.2. (nível 1) a) Desenhe outro triângulo equilátero igual ao do nível anterior e divida cada lado em 3 segmentos iguais;
b) Desenhe, para o lado de fora, um triângulo equilátero em cada lado considerando como base os segmentos centrais das divisões feitas;
c) Apague as bases dos triângulos formados.
1.3. (nível 2) a) Repita o passo 1.2;
b) Divida cada segmento gerado, ou seja, os 12 segmentos da figura, cada um em três segmentos iguais;
c) Construa triângulos equiláteros considerando como bases os segmentos centrais das divisões feitas em cada lado do fractal;
d) Apague as bases dos triângulos formados.

Tabela 1: Processo Iteratico

Nível 0	Nível 1	Nível 2

2. Complete a tabela abaixo, considerando a medida do lado igual a l:

Tabela 2: Atividade para desenvolver o cálculo do perímetro do "floco d neve".[18]

Nível (quantidade de iterações)	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Perímetro do fractal
0			
1			
2			
K			

3. Determine o perímetro de um fractal com mesma estrutura da anterior considerando a medida do lado do triângulo igual a 3 (l = 1cm).

Tabela 3: Cálculo do perímetro dado a medida do lado.

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3

4. Em qual nível o perímetro será $\frac{1024}{81}$cm, considerando l = 1cm?

___

___

5. Determine a área do triângulo inicial (nível 0), considerando a medida do lado igual a 3 cm (l =3). Lembre-se: $A_{equi} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

6. Ao passarmos do nível 0 ao nível1, quatro novos triângulos são acrescentados. Qual a redução sofrida pela área de cada um desses triângulos em relação ao triângulo inicial?

___

___

7. Essa redução será a mesma se compararmos o triângulo criado em cada nível com o anterior? Por quê?

___

___

8. E se comparamos com o nível 0, qual a redução sofrida pelo triângulo no nível 2?

___

___

9. Represente essa redução (R) com uma expressão matemática considerando a área inicial A em função do nível k.

___

___

[18] Criada pela autora.

10. Que tipo de função essa expressão representa?

____

ATIVIDADE 4 - INDICAÇÃO: 1ª e/ou 2ª Séries do Ensino Médio

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E O CONJUNTO DE CANTOR (atividade em equipe)

OBJETIVO GERAL
Introduzir o conceito de Progressão Geométrica com o auxílio de um fractal: o Conjunto de Cantor.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
- Reconhecer uma progressão geométrica;
- Classificar uma progressão geométrica como crescente, decrescente, constante ou oscilante;
- Representar genericamente uma P.G.;
- Compreender e definir Média Geométrica.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS
- Conceito de sequência;
- Lei de formação de uma sequência;
- Progressão Aritmética.

MATERIAL NECESSÁRIO
- 1 cartolina;
- Uma tesoura
- Régua;
- Lápis;
- Roteiro.

ROTEIRO – ATIVIDADE 4

TÍTULO: PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E O CONJUNTO DE CANTOR
Observação: o professor irá apenas orientar a atividade.

1. Construção do Fractal – construa uma "réplica" do conjunto de Cantor, para isso:
1.1. Corte 3 tiras de cartolina com 27 cm de comprimento (a largura fica a critério do professor, quanto mais fina melhor). O restante da cartolina será utilizado como base. A base pode ser uma folha de ofício;
1.2. Cole uma das tiras no restante da cartolina (base);
1.3. Em seguida, divida uma outra tira em três partes iguais e desconsidere a do meio. Cole os dois pedaços considerados abaixo da tira colada inicialmente como mostra a figura 1;

Figura 1: Construção do conjunto de cantor com tiras de papel 1[19].

[19]Criada pela autora.

1.4. Considere outra tira. Divida-a em três partes iguais. Desconsidere a parte central. Divida cada um os dois pedaços considerados em três partes iguais e desconsiderando os centrais, cole-os na base como mostra a figura 2;

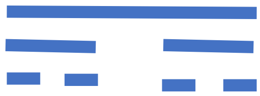


Figura 2: Construção do conjunto de cantor com tiras de papel 2.[20]

Você pode continuar fazendo esse processo até que não seja mais possível cortar as tiras de papel.

2. Registrando – Registre na tabela 1, a quantidade de tiras resultantes em cada nível (considere como nível 1 a tira inteira com 27cm):

Tabela 1: Contagem dos segmentos restantes.[21]

Nível	Quantidade de segmentos restantes
1	
2	
3	
4	
5	

3. Observe a sequência numérica gerada pela quantidade de segmentos restantes. Divida cada número, a partir do segundo por seu antecessor. O que você observou?

4. Essa sequência é um exemplo de **Progressão Geométrica (PG)** e o número que se mantém constante a cada divisão é chamada de **razão da progressão geométrica** e é representada pela letra **q**. Qual o número que indicamos pela letra q, na questão anterior?

5. Com essas informações escreva uma definição para PG:

6. A sequência de números apresentada como PG é crescente ou decrescente?

7. Como poderíamos classificar uma PG em crescente?

[20] Criada pela autora.
[21] Criada pela autora.

Resumindo: Sabendo que **a_1** é a representação do **primeiro termo de uma PG**, então o que você descreveu anteriormente acontece quando: $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$. Por exemplo: (-2; -1; -0,5; -0,25,...)(q= ½).

8. Registre na tabela 2 a medida de cada segmento em cada nível:

Tabela 2: determinação da medida de cada segmento.[22]

Nível	A medida de cada segmento
1	
2	
3	
4	
5	

9. A sequência gerada é uma PG? Se a resposta for afirmativa, calcule a razão. ____

10. Ela é crescente? __________

11. Então ela é decrescente? Como podemos caracterizar uma PG decrescente?

____

____

12. Além dessas duas classificações, uma PG também pode ser constante ou oscilante. Para ela ser constante basta que sua razão seja 1. Escreva a PG proposta a seguir e verifique:

$q = 1$ e $a_1 = 5$; _______________________________

12.1. Ela é oscilante, quando todos os seus termos são diferentes de zero e os termos são alternadamente positivos e negativos, para isso basta $q < 1$. Para verificar esse fato escreva a PG proposta:

$q = -3$ e $a_1 = 2$; ____________________________________

13.Volte para a tabela 1. Como podemos calcular a quantidade de segmentos restantes no nível n? (ou seja o termo geral da P.G.). Para facilitar observe a explicação a seguir:

Chamamos **a_n** de termo geral de uma P.G. e seus elementos são representados por (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...). Numa PG de razão q, para avançar um termo, partindo do 1º termo, basta multiplicar o termo anterior pela razão q. Observe e complete até chegar ao termo de ordem n:

Tabela 3: Determinação do termo n de uma PG.[23]

Termo	Como determiná-lo
a_2	$a_1.q$
a_3	$a_2.q = (a_1.\ q).q=a_1.q^2$
a_4	
a_5	
a_n	

14. Dessa forma, a lei de formação ou Fórmula do Termo Geral de uma P.G. é:

a_n=_____________

15. No caso da questão 2, podemos considerar que: a_1= ____ e q = _____.

16. Determine o 6º termo da sequência da questão 12.1 utilizando a fórmula:

[22] Criada pela autora.

[23] Criada pela autora.

____

Escreva a PG da questão 12.1 até o 6º termo: ___________________

17. Faça um pequeno resumo sobre o que você aprendeu com esta atividade.

____

____

____

____

____

____

____