

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
CAMPUS AVANÇADO DE NATAL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

LUANA GABRIELE FREIRE DO NASCIMENTO

**EQUAÇÃO TEÓRICA DA VARIAÇÃO TEMPORAL DOS MOMENTOS DA
FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DAS VELOCIDADES DE ROTAÇÃO ESTELAR**

NATAL/RN

2023

LUANA GABRIELE FREIRE DO NASCIMENTO

**EQUAÇÃO TEÓRICA DA VARIAÇÃO TEMPORAL DOS MOMENTOS DA
FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DAS VELOCIDADES DE ROTAÇÃO ESTELAR**

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia como requisito à conclusão da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Bráulio Batista Soares

NATAL/RN
2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do(a) autor(a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu(a) respectivo(a) autor(a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Catálogo da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

F866e Freire do Nascimento, Luana Gabriele
Equação teórica da variação temporal dos momentos da função de distribuição das velocidades de rotação estelar. / Luana Gabriele Freire do Nascimento. - Natal/RN, 2023.
55p.

Orientador(a): Prof. Dr. Bráulio Batista Soares.
Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia).
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

1. Formação estelar. 2. Velocidade rotacional. 3. Equação do momento. 4. Distribuição estelar. I. Soares, Bráulio Batista. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pela Diretoria de Informatização (DINF), sob orientação dos bibliotecários do SIB-UERN, para ser adaptado às necessidades da comunidade acadêmica UERN.

LUANA GABRIELE FREIRE DO NASCIMENTO

**EQUAÇÃO TEÓRICA DA VARIAÇÃO TEMPORAL DOS MOMENTOS DA
FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DAS VELOCIDADES DE ROTAÇÃO ESTELAR**

Monografia apresentada à Universidade
do Estado do Rio Grande do Norte -
UERN - como requisito obrigatório para
obtenção do título de Bacharel em Ciência
e Tecnologia

Aprovada em: ____/____/____.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Bráulio Batista Soares (Orientador)
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

Prof. Dr. Leonardo Linhares Oliveira
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

Prof. Dr. Brismark Goes da Rocha
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

AGRADECIMENTOS

Gostaria de aproveitar este espaço para agradecer a todos que contribuíram para a realização do meu trabalho de conclusão de curso. Primeiramente, gostaria de expressar minha gratidão à Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN), pela oportunidade de cursar uma graduação de qualidade e ter acesso a um corpo docente competente e dedicado.

Agradeço aos meus amigos no geral, que estiveram presentes em todos os momentos, me apoiando e incentivando em todas as etapas do processo. Sem a presença de vocês, certamente essa jornada teria sido muito mais difícil e desafiadora.

Quero agradecer especialmente ao professor Bráulio Batista Soares, meu orientador neste trabalho, por todo o suporte e orientação durante a elaboração deste trabalho. Suas orientações foram fundamentais para o progresso deste trabalho e para o meu desenvolvimento como estudante. Agradeço por toda a paciência, dedicação e sabedoria compartilhada.

Sou grata também aos demais professores da instituição, que contribuíram para a minha formação acadêmica e me ajudaram a crescer. Seus ensinamentos e experiências foram valiosos para o meu progresso.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho. Seja com uma palavra de incentivo, um conselho ou uma ajuda em um momento difícil.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso aborda a hipótese nebular, que explica a formação das estrelas em nuvens moleculares, e como a observação das manchas solares na superfície do Sol levou ao estudo da velocidade rotacional estelar. Após muitas observações e estudos, astrônomos conseguiram determinar que a taxa de rotação espectroscopicamente determinada era compatível com a taxa de rotação obtida por meio das manchas solares. No entanto, ainda existem dificuldades em determinar a velocidade rotacional de diferentes tipos de estrelas. Este trabalho buscou uma equação do momento da distribuição da rotação estelar que pode envolver a o fator tempo como característica específica de grupos estelares. A equação gaussiana é utilizada, mas não serve para todos os estágios evolutivos das estrelas, pois não há exatidão nos resultados. O estudo dos fenômenos estelares de rotação é importante para prever problemas futuros e minimizá-los antecipadamente. A equação final obtida neste trabalho pode contribuir para a ampliação de pesquisas relacionadas à distribuição da rotação estelar e ajudar a ajustar as curvas de distribuição observadas.

Palavras-chave: Formação estelar. Velocidade rotacional. Equação do momento. Distribuição estelar.

ABSTRACT

This thesis addresses the nebular hypothesis, which explains the formation of stars in molecular clouds, and how the observation of sunspots on the surface of the Sun led to the study of stellar rotational velocity. After many observations and studies, astronomers were able to determine that the spectroscopically determined rotation rate was compatible with the rotation rate obtained through sunspots. However, there are still difficulties in determining the rotational velocity of different types of stars. This work sought an equation for the moment distribution of stellar rotation that can involve time as a specific characteristic of stellar groups. The Gaussian equation is used, but it does not apply to all stages of stellar evolution, as there is no accuracy in the results. The study of stellar rotational phenomena is important for predicting future problems and minimizing them in advance. The final equation obtained in this work may contribute to the expansion of research related to the distribution of stellar rotation and help to adjust the observed distribution curves.

Keywords: Stellar formation. Rotational velocity. Moment equation. Stellar distribution.

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1 - Cometa NEOWISE visto em um céu cheio de Aurora	16
Figura 2 – As várias camadas do Sol.....	17
Figura 3 - Nebulosa da Águia.....	19
Figura 4 - Formation of the Stars and Their Planets.....	19
Figura 5 - Média.....	41
Figura 6 - Desvio padrão.....	42
Figura 7 - Assimetria.....	43
Figura 8 - Curtose.....	43

LISTAS DE SIMBOLOS

V	Velocidade de rotação equatorial
A	Constante de normalização
α	Alfa caracteriza o perfil da função de distribuição
σ	Sigma é ligado ao parâmetro dependente da massa estelar
Γ	Gama
$\frac{d}{dt}$	Derivada total
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial
Ψ	Psi

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	OBJETIVO.....	12
1.1.2	OBJETIVO GERAL.....	12
1.1.3	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	12
2	METODOLOGIA	13
3	REFERENCIAL TEÓRICO	15
3.1	Princípios básicos de rotação.....	16
3.2	História da determinação da rotação estelar.....	17
3.3	Formação e rotação estelar.....	18
3.4	Distribuições teóricas de rotações estelares.....	20
3.5	Estatística.....	22
4	RESULTADOS	23
5	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

Em 1755, o filósofo alemão Immanuel Kant passou a se basear na hipótese nebular na formação do sistema solar (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2000). A hipótese da nebulosa diz respeito às estrelas que são formadas no centro das nuvens na região mais densa, dentro dessas nuvens ocorre um colapso, elevando assim a temperatura no seu núcleo desencadeando reações nucleares para gerar uma estrela (VILAS-BOAS, 2018).

Por meio dos dados observacionais, a hipótese nebular foi comprovada. As estrelas nascem devido a alta densidade em nuvens moleculares, nuvens formadas por gás e poeira (VILAS-BOAS, 2018). Os primeiros estudos referentes ao comportamento rotacional do Sol ocorreram na virada do século XVII, quando os estudiosos Johannes Fabricius, Galileo Galilei, Thomas Harriot e Christopher Scheiner passaram a observar manchas solares por meio de um telescópio refrator e concluíram que as manchas solares se encontravam na superfície do sol, ou seja, na fotosfera solar (BERNARDINO, 2016).

As manchas solares observadas na superfície do Sol com o tempo foram descartadas como parâmetro de observação para descobrir a velocidade rotacional. Os astrônomos Richard Carrington e Gustav Spörer, entre os anos 1853 e 1861, mostraram que a parte externa visível do Sol não gira como um corpo rígido, seu período de rotação muda com a latitude heliocêntrica (LEVENHAGEN; KÜNZEL, 2009).

Após muitos estudos e observações entre os anos 1887-1906, os astrônomos sueco e alemão, Nils Dunér e Jakob Halm, conseguiram determinar que a taxa de rotação determinada espectroscopicamente e a taxa de rotação obtida por meio das manchas solares eram compatíveis. Com o tempo, novas descobertas foram feitas, Grigory Shajn e Otto Struve desenvolveram no século XX um método sistemático para determinar a velocidade de rotação estelar, conhecido hoje em dia como “método gráfico”. No entanto, esse método não leva em consideração outros fatores, como o tempo, temperatura, pressão, campo magnético, entre outros que podem interferir no alargamento das linhas espectrais, dificultando, assim, a leitura da velocidade, os fatores podem interferir no alargamento das linhas espectrais (LEVENHAGEN; KÜNZEL, 2009).

É possível perceber que o comportamento rotacional da velocidade estelar continua sendo um problema, pois existem vários tipos de estrelas com características diferentes como: tamanhos, intensidades luminosas, idades e demais características. Face a esse problema, este estudo buscará responder à seguinte questão: existe uma equação do momento da distribuição da rotação estelar que possa envolver característica de critério temporal da velocidade de rotação de grupos estelares?

A falta de uma função matemática teórica para o momento da distribuição da rotação estelar que envolve características específicas de um grupo é um grande problema para a comunidade científica, por não ter uma exatidão nos resultados. No ambiente científico, de modo mais amplo, se utiliza uma equação que envolve a distribuição da rotação que é uma equação gaussiana, porém, não serve para todos os estágios evolutivos da estrela (SOARES; SILVA, 2013).

Assim sendo, é importante saber como funcionam os fenômenos estelares de rotação, pois será possível realizar com a equação final obtida neste trabalho, previsões dos problemas futuros, para tentar minimizar o problema antecipando uma solução. Um exemplo de fenômeno estelar que pode ser previsto por equações teóricas são as explosões solares, essas explosões podem acarretar danos nos astros que estão em seu entorno.

Entende-se que esse estudo poderá contribuir com a ampliação de pesquisas que se baseiam na equação matemática encontrada no final deste trabalho, pois ajudará a comunidade científica relacionando o tempo com a variação do momento de distribuição e ajustando as curvas de distribuição observadas. Além disso, do ponto de vista pessoal, levará a concluir uma etapa na construção de conhecimentos e contribuir na elaboração de projetos futuros.

1.1 OBJETIVO

1.1.2 OBJETIVO GERAL

Demonstrar a evolução temporal da distribuição das velocidades de rotação estelar através da derivada total dos momentos de distribuição estelar.

1.1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Obter as equações dos momentos da função de distribuição;
- Trabalhar com a função de distribuição comparando-a com a função beta e gama;
- Derivar implicitamente e discutir as funções obtidas pela comparação com constante temporal (t).

2 METODOLOGIA

Este estudo descritivo foi realizado através de uma pesquisa matemática-teórica, que se concentra nas relações entre conceitos matemáticos, na elaboração de novos conceitos e na construção de estruturas teóricas coerentes. Esse tipo de pesquisa é crucial para o avanço da compreensão matemática e para o desenvolvimento de aplicações práticas da matemática em diversas áreas de estudos. O trabalho matemático-teórico requer habilidades analíticas e criativas para explorar e compreender os fundamentos e as implicações das ideias matemáticas. Ele envolve a aplicação de métodos rigorosos de dedução lógica e raciocínio abstrato para derivar novos resultados a partir de conceitos já existentes e desenvolver novas teorias e estruturas matemáticas (KLINE, 1980)

Neste trabalho foram usados materiais bibliográficos com o intuito de utilizar livros de autores renomados, teses de doutorados, além de fundamentações matemáticas e astronômicas para analisar principalmente cálculos realizados pelo Soares e Silva (2013) para auxiliar no desenvolvimento da função dependente do tempo com ajuda de métodos de distribuição, métodos estatísticos descritivos de dados, técnicas matemáticas de derivação e conhecimentos em funções especiais que foram necessárias.

Este trabalho de pesquisa de caráter básico possui uma abordagem quantitativa, pois foi utilizado processamento eletrônico, dados e testes das hipóteses estatísticas (GIL, 2002). O desenvolvimento do presente trabalho fez uso dos recursos de estrutura computacional disponível na UERN, além do uso de softwares específicos, de código aberto, para análise dos dados e confecção dos gráficos. Foi feito por meio de distribuições estatísticas das velocidades de rotação, gráficos de frequência da rotação das médias dos momentos.

O processo inicial foi trabalhar com a equação Maxwelliana generalizada apresentada na Eq. 1.

$$F_{\alpha}(V) = A_{\alpha}V^2 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (1)$$

A equação é composta pela função de distribuição ($F(V)$), a constante de normalização (A_{α}), pela velocidade padrão de um grupo de estrelas de massas parecidas (σ), pela caracterização do perfil da função de distribuição das rotações da

amostra de estrelas (α) e pela velocidade de rotação (V) (SOARES; SILVA 2013). As operações foram feitas passo a passo para melhor desenvolvimento do trabalho. O trabalho foi iniciado com o processo da constante de normalização. Em seguida, o resultado obtido foi usado para calcular a média dos momentos (V_n) e por fim, derivar implicitamente a média dos momentos com relação ao parâmetro escolhido, ou seja, derivar a função dependente do tempo.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Os astros do universo são estudados e analisados a mais de 3000 a.C. pelos chineses, babilônios, assírios e egípcios com o intuito de fazer previsões do futuro, medir a passagem do tempo para prever a melhor época de plantio e colheita, com o tempo, foram descobrindo a duração de um ano, a data de passagem dos cometas e passaram a observar as estrelas. As descobertas feitas ao longo do tempo, foram ajudando na formação do pensamento científico humano por desvendar alguns fenômenos (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2000).

O estudo do Sol, por exemplo, possibilitou determinar que a sua rotação é responsável por alguns dos fenômenos que ocorrem no planeta Terra, a aurora boreal é um desses fenômenos (NASA, 2021). A rotação do Sol, assim como para toda estrela, é responsável por uma grande quantidade de fenômenos, mas também pela formação do campo magnético existente na estrela (KARTTUNEN *et al.*, 2017). O campo magnético solar proveniente da intensidade da velocidade de rotação é importante para a produção de energia solar e influencia sobremaneira a atmosfera dos planetas. O campo magnético de uma estrela depende da intensidade da rotação; forte intensidade causará efeitos negativos e intensidade fraca pode ter efeitos positivos no planeta que habitamos. Ou seja, a intensidade do campo magnético solar pode causar interferências em eventos atmosféricos da Terra (KARTTUNEN *et al.*, 2017). O campo magnético solar chega a atingir a Terra com ajuda dos ventos solares, podendo realizar interferências positivas, como, show de luzes da aurora boreal como pode ser vista na Fig. 1 ou interferências negativas referente a quebra de satélites artificiais e danos redes elétricas inteiras de uma região do planeta como aconteceu na região do Canadá em 1989 (KARTTUNEN *et al.*, 2017).

Figura 1 - Cometa NEOWISE visto em um céu cheio de Aurora



Fonte: Lach, 2020.

No que tange às rotações estelares, podemos afirmar que se tornaram um dos parâmetros mais importantes na astrofísica nos tempos modernos, pois a rotação consegue interferir na atmosfera planetária. É interessante observar as fases evolutivas das estrelas e suas manchas resultantes de campos magnéticos intensos na superfície estelar. A rotação, por influenciar a produção de energia das estrelas, possibilita a proposição de hipóteses sobre formação e evolução estelar (OLIVEIRA, 2019).

3.1 Princípios básicos de rotação

A rotação é um movimento em torno de um eixo que para ser estudado é necessário se basear no centro de massa de um objeto ideal, ou seja, objeto considerado um corpo rígido, pois não se pode analisar um corpo que sofre deformação por ter comportamentos diferentes em cada parte do corpo, como: velocidades, direções e distribuição de massa. Para que a rotação de um corpo seja estudada, é necessário que haja a determinação do seu centro de massa (SERWAY; JEWETT, 2014).

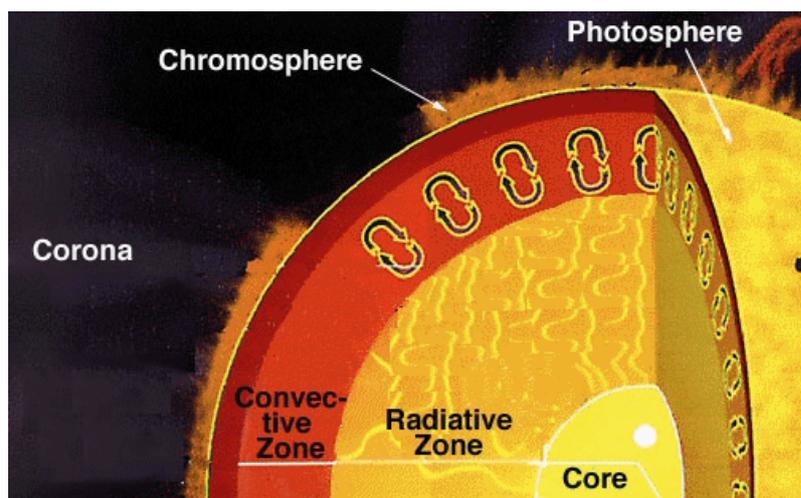
Um corpo rígido simétrico ou assimétrico possui concentração de massa independente do seu formato, para encontrar essa concentração basta identificar o ponto de equilíbrio, onde localiza-se o centro de massa (AZEVEDO, 2015).

Para que ocorra o movimento de rotação sem que o objeto se deforme é preciso que as forças atômicas sejam superiores as forças menores fazendo com que o objeto gire e atuem sem deformar o objeto. Então, para a rotação ser analisada é necessário um estudo da variação da mudança do ângulo da partícula fixa no objeto ideal a uma determinada faixa de tempo (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008).

3.2 História da determinação da rotação estelar

Em 1610, manchas mais escuras e irregulares foram observadas na região da fotosfera solar pela primeira vez em um telescópio e, assim, a rotação estelar passou a ser estudada (TASSOUL, 1998). Na Fig. 2 é possível observar a anatomia do Sol, o Sol é composto pelo núcleo (core), ele é responsável pelas reações termonucleares elevando a temperatura na região, na zona radiativa (radiative zone) ocorre o movimento lento da energia solar para fora, na zona de convecção (convection zone) ocorrer a continuação da passagem de energia com ajuda das correntes de convecção do gás que é aquecido, a fotosfera (photosphere) é a região visível do Sol que se encontra as manchas solares (sun spots) e a última parte a ser destacada é a corona, nela se encontra os elementos ionizados que faz com que brilhem no comprimento de onda de raios-x e ultravioleta extremos (NASA, 2013).

Figura 2 – As várias camadas do Sol



Fonte: NASA, 2012.

Em 1611, o químico e metalurgista Johannes Goldschmidt provou a existência da rotação axial do Sol observando as manchas solares. Galileu, em 1613, publicou

sua adesão ao modelo heliocêntrico afirmando que as manchas solares giravam junto com a superfície do Sol (TASSOUL, 1998).

O inglês Richard Carrington e o astrônomo alemão Gustav Spörer fizeram um avanço significativo em 1850 sobre a rotação estelar. Eles concluíram que a superfície do Sol não gira como um corpo sólido, ou seja, não gira como um corpo celeste compacto que tem o mesmo volume e forma bem definida. Chegaram à conclusão que a velocidade de rotação do Sol é maior na região do equador e vai diminuindo em direção aos polos (TASSOUL, 1998).

Por causa de um novo espectroscópio criado em 1871 desenvolvido por Johann Zöllner, o estudioso Hermann Vogel, no mesmo ano do desenvolvimento do espectroscópio mostrou que a rotação solar pode ser detectada por meio das medições de desvio doppler das linhas espectrais, ou seja, da intensidade luminosa em diferentes comprimentos de onda, que são provenientes das bordas opostas do disco solar (TASSOUL, 1998).

Segundo Garcia, Moreno e Sumi (2013, p.1) o desvio doppler “é um fenômeno observado nas ondas eletromagnéticas quando emitidas ou refletidas por um objeto que está em movimento com relação ao observador”, esse fenômeno se aplica nas linhas espectrais podendo se afastar ou se aproximar de acordo com os pontos referenciais estudados. Em 1877, com a descoberta de Vogel, o químico William de Wiveleslie Abney divulgou pela primeira vez que é possível determinar a taxa de rotação das estrelas a partir das larguras de linhas espectrais e que o espectro é um composto de luz de toda parte do disco da estrela que com efeito doppler o afastamento da borda causaria a luz vermelha e a aproximação causaria a luz espectral violeta (TASSOUL, 1998).

3.3 Formação e rotação estelar

A formação das estrelas gerava grande curiosidade na comunidade científica e assim passaram a pensar na hipótese nebular. Foi observado que, entre as estrelas, aparentemente existia um espaço vazio, porém, era um espaço composto por átomos de hidrogênio, que são aquecidos e ionizados que iluminam essa região de átomos frios, região conhecida como nebulosa, observe a Fig.3 a seguir (LANG, 2012).

Figura 3 - Nebulosa da Águia

Fonte: ESA/NASA/Hubble.

Pela hipótese nebular, foi possível chegar à conclusão de que o Sol e os planetas foram formados juntos por causa do colapso gravitacional mostrado na Fig. 4. As nuvens interestelares de gases e poeira que rotacionam em torno de um eixo, explicando assim a semelhança do movimento do Sol e dos planetas. Os principais planetas do sistema solar possuem movimentos ordenados e alinhados, suas órbitas estão quase no mesmo plano e quase coincide com o plano equatorial do Sol e os planetas se movem na mesma direção dentro de suas órbitas solares, exceto Vênus e Urano (LANG, 2012).

Figura 4 - Formation of the Stars and Their Planets

Fonte: Lang, 2012.

Os satélites naturais dos planetas acompanham suas órbitas, ou seja, giram na mesma direção que os planetas por estarem no mesmo plano equatorial. Em 1755 o filósofo alemão Immanuel Kant concluiu que o Sol foi formado no centro da nebulosa solar, em outras palavras, foi formado no centro de uma nuvem densa e os planetas se formaram a partir de uma condensação que gira em torno do Sol (LANG, 2012).

As estrelas têm suas formações no centro dessas nuvens densas, giratórias e cheias de partículas. O núcleo dessas nuvens ficam tão densas, compactas e quentes, resultando em um núcleo brilhante rodeado de planetas que foram formados ao mesmo tempo (LANG, 2012). Neste processo de formação estelar, o núcleo se contrai devido à força gravitacional da própria nuvem. Isso faz com que o colapso se acelere e a rotação desse núcleo aumente devido à conservação do momento angular. Por consequência, a massa do gás rotante assume uma forma de disco e o núcleo, que se tornará a estrela, uma forma esférica (OLIVEIRA; SARAIVA, 2000). Portanto, podemos concluir com as assertivas acima, que uma estrela então herda sua velocidade de rotação da sua nuvem de origem.

3.4 Distribuições teóricas de rotações estelares

A rotação estelar passou a ser estudada após as descobertas das manchas solares no século XVI por Galileu, Harriot, Fabricius e Scheiner, no entanto, partes dos estudos não se aplicavam a outros aspectos importantes das estrelas, como as suas configurações gasosas, momento angular, o tempo de sua formação, diferentes tamanhos, entre outros (MACIEL, 2007). Hoje sabemos que cada estrela rotaciona com uma determinada velocidade. A rotação estelar ajuda no processo de evolução das estrelas, pois ocorre a redistribuição do momento angular na nuvem proto-estelar (SOARES, 2000). Além disso, o próprio processo de evolução da estrela contribui para a mudança de velocidade de rotação (IRWIN; BOUVIER, 2008).

O Sol viverá aproximadamente 11 bilhões de anos, o tempo de vida de uma estrela varia de acordo com seu tamanho, no entanto, não se compara ao tempo de vida do homem, então, estudar a evolução estelar se torna uma atividade difícil por não ser possível acompanhar todo seu ciclo no curto tempo que o ser humano tem (MACIEL, 1995). Devido a vida longa que a estrela tem, o estudo evolutivo é feito por estatística, utilizando amostras específicas de estrelas que tenham sua idade e

velocidade de rotação medidas por meio de distribuições estatísticas das velocidades de rotação.

Sabe-se que os momentos da função de distribuição da rotação de um conjunto de estrelas podem mostrar o comportamento rotacional e a natureza estatística das rotações estelares calculando a média, assimetria, curtose e desvio padrão. Cada momento da função de distribuição da velocidade de rotação determina o comportamento geral das velocidades de rotação de grupos estelares (SOARES; SILVA, 2013).

Muitos estudos usaram diferentes distribuições estatísticas para descrever o comportamento da velocidade de rotação de populações de estrelas diferentes. Soares e Silva (2013) propõem que a função de distribuição de velocidade rotacional deve obedecer uma equação diferencial não linear por se tratar de um problema complexo. Por este motivo, eles utilizaram uma função de distribuição estatística generalizada oriunda da equação diferencial não linear para reescrever a função de distribuição padrão utilizada até aquele momento no estudo da evolução da velocidade da rotação estelar. A função do tipo Maxwelliana generalizada é a indicada na Eq. 1. reescrita a seguir.

$$F_{\alpha}(V) = A_{\alpha} V^2 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (1)$$

O A_{α} é a constante de normalização que depende de α e σ . A letra grega σ representa uma quantidade com dimensões de uma velocidade, é um parâmetro dependente da massa estelar e está ligado à largura característica da distribuição e é conhecido também como uma velocidade padrão de um grupo de estrelas de massas parecidas. O parâmetro α , caracteriza o perfil (o contorno) da função de distribuição das rotações da amostra de estrelas. A velocidade de rotação equatorial V , será determinada pelas medidas do período de rotação e $F_{\alpha}(V)$ é a função de distribuição e servirá também para encontrar a medida das inclinações dos eixos de rotação estelar em relação à linha de visada (reta que liga o observador ao observado) (SOARES; SILVA, 2013).

Para formular a equação teórica da variação temporal dos momentos da função de distribuição das velocidades de rotação estelar, será necessário usar a Eq. 1 para encontrar a constante de normalização A , calcular os n -ésimos momentos de

distribuição $\langle V^n \rangle$ e realizar a derivada total $\frac{d \langle V^n \rangle}{dt}$ desses momentos considerando que os parâmetros σ e q dependam do tempo t .

Tendo em vista a rotação estelar e sua importância no equilíbrio do planeta Terra, será apresentado mais sobre a rotação estelar e como a idade das estrelas pode influenciar essa rotação.

3.5 Estatística

Larson e Farber (2015, p. 3) definem estatística como uma “ciência que trata da coleta, organização, análise e interpretação dos dados para a tomada de decisões”. O intuito de realizar um estudo estatístico neste trabalho é utilizar a estatística como um fornecedor de informações que ajude no desenvolvimento de cálculos que melhor desenvolvem este trabalho.

Anteriormente foi dito que os estudos estelares são feitos estatisticamente pelo fato da vida humana não acompanhar o ciclo de vida de uma estrela e é feito estatisticamente por se tratar de uma reunião de informações que vieram de observações, contagem, medições ou respostas (LARSON; FARBER, 2015).

A estatística está representada na realização de gráficos de frequência da rotação e momentos de distribuição. Os momentos de distribuição envolvem o desenvolvimento cálculos de médias, desvios, assimetrias e curtoses que indicam algum ponto específico da rotação (SOARES; SILVA, 2013).

Estão inclusos também os quatro momentos estatísticos da função ditos anteriormente, são: médias, desvio padrão, assimetria e curtose. A média é uma variável aleatória que indica o ponto de equilíbrio, medida central do que é estudado e no estudo estelar indica a concentração de dados de uma distribuição, o comportamento rotacional e a natureza estatística da rotação. Já o desvio padrão mostra o grau de dispersão de um conjunto de dados, indica a uniformidade; a assimetria caracteriza o quanto uma distribuição é assimétrica com relação ao valor mais provável; e a curtose caracteriza o achatamento da curva, mostrando o quanto a função é pontiaguda (SOARES; SILVA, 2013).

4 RESULTADOS

Este trabalho se deu início com a função generalizada Maxwelliana indicada na Eq. 1 apresentada na página 20. Então, para mais fácil entendimento observe a Eq. 2 abaixo.

$$\int F(V) dV = 1 \quad (2)$$

Introduzindo a equação generalizada Maxwelliana é possível obter as equações 3 e 4 sem mudar a equação original. Quando ocorre a substituição do valor do α quando for $\alpha < 1$ e $\alpha \geq 1$, o resultado sempre será um número positivo, então temos:

$$\alpha < 1 \rightarrow \int A_1 V^2 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV \quad (3)$$

$$\alpha \geq 1 \rightarrow \int A_1 V^2 \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} dV \quad (4)$$

O V representado na integral acima indica a velocidade de rotação equatorial e pode ser obtida por medidas do período de rotação. Sabe-se que a velocidade não pode ser representada por qualquer valor, ou seja, ela não pode ser representada por um valor negativo, devido a essa conclusão, será necessário encontrar o valores máximos das integrais à ser trabalhadas. Para encontrar os valores mencionados foi usado como base o material de Soares e Silva (2011). Este trabalho teve como análise dois pontos específicos, quando $\alpha < 1$ e $\alpha \geq 1$, esses pontos foram analisados sob a função generalizada Maxwelliana. Os cálculos observados nas equações 5 a 9 seguintes são referentes ao limite máximo que corresponde à $\alpha < 1$, pois quando α for substituído por um valor menor que 1 o resultado sempre será um número positivo.

$$\left\{ AV_{\alpha < 1}^2 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{V_{\alpha < 1}^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \geq 0 \right\} \frac{1}{AV_{\alpha < 1}^2} \quad (5)$$

$$\left\{ \left[1 - (1 - \alpha) \frac{V_{\alpha < 1}^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \geq 0 \right\}^{1-\alpha} \quad (6)$$

$$(-1) \cdot \left[-(1 - \alpha) \frac{V_{\alpha < 1}^2}{\sigma^2} \right] \geq -1 \cdot (-1) \quad (7)$$

$$V_{\alpha < 1}^2 \leq \frac{\sigma^2}{(1 - \alpha)} \quad (8)$$

$$V_{\alpha < 1} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \alpha}} \quad (9)$$

A Eq. 9 encontrada corresponde ao valor superior do limite para quando $\alpha < 1$. Com procedimentos análogos é possível encontrar o $V_{\alpha \geq 1}$ quando $\alpha \geq 1$. Então observe as equações 10 a 12 que mostram os passos utilizados para encontrar o valor superior do ponto determinado.

$$\left\{ AV_{\alpha \geq 1}^2 \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha - 1}} \geq 0 \right\} \frac{1}{AV_{\alpha \geq 1}^2} \quad (10)$$

$$\left\{ \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha - 1}} \geq 0 \right\}^{\alpha - 1} \quad (11)$$

$$\frac{1}{1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2}} \geq 0 \quad (12)$$

Será necessário abrir a Eq. 12 para que haja um maior aprofundamento para encontrar o valor do limite máximo quando $\alpha \geq 1$, o caminho a ser seguido foi utilizar a função logarítmica por se tratar de uma operação que se baseia na propriedade da potenciação, podemos ver que tanto o V e o σ estão elevados a 2, observe a continuidade da equação 12 a seguir.

$$\log \left(\frac{1}{1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2}} \geq 0 \right) \quad (12.1)$$

Sabe-se que o $\log 0$ não existe, então será necessário substituir o $\log 0$ por um valor que se aproxime dele, então ε fará esse papel, pois representa uma quantidade infinitesimalmente pequena, concluindo.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(\frac{1}{1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2}} \geq 0 \right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (12.2)$$

Aplicando a regra do quociente do logaritmo, temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log 1 - \log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (12.3)$$

O $\log 1 = 0$, então:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[0 - \log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (12.4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (12.5)$$

Multiplicando por (-1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right) \leq -\log \varepsilon \right] \quad (12.6)$$

Aplicando o logaritmo de potência, $-\log \varepsilon = \log \varepsilon^{-1}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right) \leq \log \varepsilon^{-1} \right] \quad (12.7)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \right) \leq \log \frac{1}{\varepsilon} \right] \quad (12.8)$$

Deixando em um \log único, temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \quad (12.9)$$

Prosseguindo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left((\alpha - 1) \frac{V_{\alpha \geq 1}^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right] \quad (12.10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(V_{\alpha \geq 1}^2 \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right] \quad (12.11)$$

Propriedade da potência após tirar o log de evidência

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 \log V_{\alpha \geq 1} \leq \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right] \quad (12.12)$$

Na Eq. 12.13 ocorre uma divisão por 2 dentro do limite.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(2 \log V_{\alpha \geq 1} \leq \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right) \cdot \frac{1}{2} \right] \quad (12.13)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log V_{\alpha \geq 1} \leq \frac{1}{2} \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right] \quad (12.14)$$

O V_1 será positivo definido, pois o seu limite inferior é 0 (zero) e se pode concluir que $\sigma^2 > 0$, se $\alpha > 1$ então, $\alpha - 1 > 0$. Devido a essas conclusões será possível dizer que $\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} > 0$, portanto os valores de log do lado direito são positivos, ou seja > 0 . Na Eq. 12.15 ocorre a aplicação da propriedade do logaritmo da potência, temos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log V_{\alpha \geq 1} \leq \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (12.15)$$

Como $V_{\alpha \geq 1} > 0$, o resultado não poderá ser negativo, então $\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ e o $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$, portanto:

$$V_{\alpha \geq 1} \leq \left((\infty - 1) \frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12.16)$$

Por ter no argumento o ∞ , podese concluir que o resultado será ∞ , então:

$$V_{\alpha \geq 1} \leq \infty \quad (12.17)$$

Com os cálculos relevantes feitos, foi possível determinar o limite superior quando $\alpha \geq 1$, dado que corresponde com os dados de Soares e Silva (2011) então, reunindo todos os dados referentes aos limites superiores e inferiores para cada α , foi possível a construção das equações 13 e 14 abaixo. Para ser melhor visualmente, os $V_{\alpha < 1}$ e $V_{\alpha \geq 1}$ serão substituídos pela constante V . Assim temos:

$$\alpha < 1 \rightarrow \int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}} A_1 V^2 \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV \quad (13)$$

$$\alpha \geq 1 \rightarrow \int_0^{\infty} A_1 V^2 \left[1 + (\alpha-1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} dV \quad (14)$$

Pode-se observar na função generalizada Maxwelliana a presença da constante A_1 e A_2 nas equações 13 e 14. Elas são constantes de normalização, são fatores multiplicativos de um processo comum que garante que a soma ou integral definida de todas as probabilidades seja 1 (ROSS, 2010).

$$A = \frac{1}{f(x)} \quad (15)$$

Então

$$\int AV^2 \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV = 1 \quad (16)$$

$$A \int V^2 \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV = 1 \quad (17)$$

$$A = \frac{1}{\int V^2 \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV} \quad (18)$$

temos ao atribuir os valores superiores da velocidade as Eq. 19 e 20 com a função Maxwelliana adaptada trabalhadas anteriormente.

$$\alpha < 1 \rightarrow A_1 = \frac{1}{\int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}} V^2 \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV} \quad (19)$$

$$\alpha \geq 1 \rightarrow A_2 = \frac{1}{\int_0^{\infty} V^2 \left[1 + (\alpha-1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} dV} \quad (20)$$

Para ser de fácil entendimento, as integrais serão retiradas do denominador e serão resolvidas separadamente. O primeiro a ser trabalhado será para o $\alpha < 1$ que corresponde ao A_1 .

$$\int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}} V^2 \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV \quad (21)$$

O $V^2 = V \cdot V$, então separando e mudando de lugar temos a Eq. 22.

$$\int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}} V \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} V dV \quad (22)$$

Fazendo a seguinte substituição variáveis da Eq. 20, temos os dados encontrados na Eq. 23.

$$x = (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2}; \quad dx = \frac{2V}{\sigma^2} (1-\alpha) dV; \quad V dV = \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} dx; \quad V = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \sqrt{x} \quad (23)$$

Substituindo na Eq. 22 é possível obter a Eq. 24.

$$\int \frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \sqrt{x} [1-x]^{1/(1-\alpha)} \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} dx \quad (24)$$

Na Eq. 24 podemos observar que há uma nova variável, o x , então, será necessário encontrar o limite inferior e superior da nova constante utilizando dados retirados da Eq. 23 e utilizando os limites anteriores da Eq. 19, é possível adquirir Eq. 25 e 26 abaixo.

$$x_{inf} = (1-\alpha) \frac{V_{inf}^2}{\sigma^2} \rightarrow x_{inf} = (1-\alpha) \frac{0^2}{\sigma^2} \rightarrow x_{inf} = 0 \quad (25)$$

$$x_{sup} = (1-\alpha) \frac{V_{sup}^2}{\sigma^2} \rightarrow x_{sup} = (1-\alpha) \frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^2}{\sigma^2} \rightarrow x_{sup} = 1 \quad (26)$$

Ao obter os limites inferior e superior, temos:

$$\int_0^1 \frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \sqrt{x} [1-x]^{1/(1-\alpha)} \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} dx \quad (27)$$

Isolando as constantes na Eq. 28 e finalizando o cálculo na Eq. 29

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \cdot \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} \int_0^1 x^{1/2} [1-x]^{1/(1-\alpha)} dx \quad (28)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^3 \int_0^1 x^{1/2} [1-x]^{1/(1-\alpha)} dx \quad (29)$$

Uma das soluções possíveis para realizar integração da Eq. 29, é realizar uma comparação com a função beta (B_1) que se encontra na Eq. 30, passo seguido pelo material de Soares (2006).

$$B_1(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} [1-t]^{w-1} dt \quad (30)$$

Pode-se observar a semelhança entre as equações 29 e 30, então será possível encontrar a valores das incógnitas dos expoentes do B_1 por meio de uma comparação com a Eq. 29, observe o resultado após a comparação das equações na Eq. 31 seguinte.

$$t = x; z - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow z = \frac{3}{2}; w - 1 = \frac{1}{1-\alpha} \rightarrow w = \frac{1+1-\alpha}{1-\alpha}; w = \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \quad (31)$$

Seguindo a ideia principal de Soares (2006), com os valores encontrados será possível aplicar na função gama que veio da função beta que é uma razão da função gama.

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)} \quad (32)$$

Agora é possível determinar a constante de normalização (A_1) que pode ser encontrada na Eq. 19 utilizando as constantes que foram isoladas na Eq. 29 e os dados encontrados na equação 32. Na Eq. 33 ocorrerá a substituição do resultado da integração que se encontra no denominador.

$$A_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^3 \cdot \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)}} \quad (33)$$

Calculando

$$A_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sigma}\right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (34)$$

$$A_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sigma}\right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (35)$$

Foi encontrado a função de normalização para $\alpha < 1$ que corresponde a função A_1 presente na Eq. 35. Nas equações seguintes será determinada a constante de normalização que corresponde a $\alpha \geq 1$ que seguirá o mesmo processo que foi usado para encontrar A_1 . Pode-se observar uma integração presente no denominador da Eq. 20 da função de normalização referente A_2 quando $\alpha \geq 1$. Na Eq. 36 pode-se observar o denominador que se encontra presente na Eq. 20, esse procedimento foi seguido para encontrar a constante de normalização A_2 , veja.

$$\int_0^{\infty} V^2 \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} dV \quad (36)$$

Aplicando a substituição de variáveis

$$y = (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}; \quad dy = \frac{2V}{\sigma^2} (\alpha - 1) dV; \quad V dV = \frac{\sigma^2}{2(\alpha - 1)} dy; \quad V = \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \sqrt{y} \quad (37)$$

Substituindo

$$\int \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \sqrt{y} [1 + y]^{-1/(\alpha-1)} \frac{\sigma^2}{2(\alpha - 1)} dy \quad (38)$$

Na Eq. 39 ocorre o isolamento das constantes na integração e prossegue com o processo do cálculo na equação seguinte.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \cdot \frac{\sigma^2}{2(\alpha - 1)} \int \sqrt{y} [1 + y]^{-1/(\alpha-1)} dy \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \right)^3 \int y^{1/2} [1 + y]^{-1/(\alpha-1)} dy \quad (40)$$

Para trabalhar com uma nova constante será preciso encontrar um novo limite inferior e superior utilizando dados retirados da Eq. 37 e os limites da Eq. 36, observe as equações 41 e 42.

$$y_{inf} = (\alpha - 1) \frac{V_{inf}^2}{\sigma^2} \rightarrow y_{inf} = (\alpha - 1) \frac{0^2}{\sigma^2} \rightarrow y_{inf} = 0 \quad (41)$$

$$y_{sup} = (\alpha - 1) \frac{V_{sup}^2}{\sigma^2} \rightarrow y_{sup} = (\alpha - 1) \frac{\infty^2}{\sigma^2} \rightarrow y_{sup} = \infty \quad (42)$$

Com os novos limites a Eq. 43 pode ser escrita dessa maneira.

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \right)^3 \int_0^{\infty} y^{1/2} [1 + y]^{-1/(\alpha-1)} dy \quad (43)$$

Após encontrar os limites é possível resolver a integração contida na Eq. 43 ao realizar uma comparação como o Soares (2006) com a função beta (B_2) encontrada na Eq. 44.

$$B_2(z, w) = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t)^{z+w}} dt \quad (44)$$

Nota-se uma semelhança entre as equações 41 e 42, então se torna cabível uma comparação, essa comparação é mostrada na comparação de expoentes presentes na Eq. 45 abaixo.

$$\begin{aligned} t = y; z - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow z = \frac{3}{2}; -(z + w) = -\frac{1}{\alpha - 1} \rightarrow z + w = \frac{1}{\alpha - 1}; \\ w = \frac{1}{\alpha - 1} - z \rightarrow w = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{3}{2} \rightarrow w = \frac{5 - 3\alpha}{2\alpha - 2} \end{aligned} \quad (45)$$

Após os resultados dos expoentes encontrados com o método de comparação, será possível aplicar os valores encontrados na razão de funções gama, veja a Eq. 46.

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)} \quad (46)$$

Os cálculos realizados entre as equações 37 até a 46 facilitam a determinação da constante de normalização A_2 presente na Eq. 20, a Eq. 47 mostra a junção de todos os dados encontrados para completar a função de normalização.

$$A_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha-1}}\right)^3 \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}} \quad (47)$$

Calculando

$$A_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha-1}}\right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}} \quad (48)$$

$$A_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sigma}\right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \quad (49)$$

Ao obter os dois resultados da normalização é possível substituir as constantes A_1 e A_2 na função de distribuição, veja.

$$F_{V_{\alpha < 1}}(V) = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right) V^2 \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (50)$$

$$F_{\alpha \geq 1}(V) = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \right) V^2 \left[1 + (\alpha-1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} \quad (51)$$

Encontrar as constantes de normalização A_1 e A_2 foram as primeiras etapas para preencher as informações das equações 13 e 14 respectivamente, no entanto, falta encontrar os dados da segunda etapa, que seria a média dos momentos, que demonstram as estruturas gráficas indicando a média, o desvio padrão, a assimetria e a curtose. A Eq. 52 mostra o cálculo da média dos momentos retirado e modificado do material de Soares e Silva (2011).

$$\langle V^n \rangle = A \int V^{n+2} \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV \quad (52)$$

Então temos como média dos momentos:

$$\alpha < 1 \rightarrow \langle V_1^n \rangle = A_1 \int V^{n+2} \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV \quad (53)$$

$$\alpha \geq 1 \rightarrow \langle V_2^n \rangle = A_2 \int V^{n+2} \left[1 + (\alpha-1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} dV \quad (54)$$

A média dos momentos que é elevada a n -ésimo momento mostra que quando esse $n = 1$ indicará a média, quando $n = 2$ mostrará o desvio padrão, $n = 3$ será a assimetria e $n = 4$ a curtose. Antes de mostrar cada momento especificamente, será preciso encontrar a $\langle V^n \rangle$ quando $\alpha < 1$ e $\alpha \geq 1$ (SOARES; SILVA, 2013). Nas equações seguintes verá a resolução da média dos momentos referente à $\alpha < 1$.

$$\langle V_1^n \rangle = A_1 \int V^{n+2} \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} dV \quad (55)$$

O limite inferior da velocidade não será um número negativo, então iniciará no 0 (zero) quando $\alpha < 1$ e $\alpha \geq 1$, e restará descobrir os limites superiores para cada α específico. As equações 56 a 63 mostram os passos utilizados para encontrar o limite superior para $\alpha < 1$, passos esses que se repetem quando são encontrados os limites das constantes de normalização, veja.

$$\left\{ V^{n+2} \left[1 - (1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \geq 0 \right\} \cdot \frac{1}{V^{n+2}} \quad (56)$$

$$\left\{ \left[1 - (1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \geq 0 \right\}^{1-\alpha} \quad (57)$$

$$1 - (1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \geq 0 \quad (58)$$

$$-(1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \geq -1 \quad (59)$$

$$(-1) \cdot \left(-(1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right) \geq (-1) \cdot (-1) \quad (60)$$

$$(1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \leq 1 \quad (61)$$

$$V^2 \leq \frac{\sigma^2}{1 - \alpha} \quad (62)$$

$$V \leq \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \alpha}} \quad (63)$$

Quando $\alpha \geq 1$

$$\left\{ V^{n+2} \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} \geq 0 \right\} \cdot \frac{1}{V^{n+2}} \quad (64)$$

$$\left\{ \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} \geq 0 \right\}^{\alpha-1} \quad (65)$$

$$\left[1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}\right]^{-1} \geq 0 \quad (66)$$

$$\frac{1}{1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}} \geq 0 \quad (67)$$

Para desenvolver a equação 67 com o intuito de descobrir o limite superior referente a $\alpha \geq 1$ será necessário abrir a equação 67 para melhor entendimento utilizando a função logarítmica, observe:

$$\log\left(\frac{1}{1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}} \geq 0\right) \quad (67.1)$$

Como já visto anteriormente nos filamentos da equação 12, o $\log 0$ não existe, então na Eq. 67.2 acontece a substituição do $\log 0$ pelo $\log \varepsilon$, pois o ε se aproxima de zero.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log\left(\frac{1}{1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}}\right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (67.2)$$

A equação 67.3 foi obtida aplicando utilizando a regra do quociente do logaritmo, a 67.4 foi resolvendo o $\log 1$ e a Eq. 67.5 foi ajustando.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log 1 - \log\left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}\right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (67.3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[0 - \log\left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}\right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (67.4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\log\left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}\right) \geq \log \varepsilon \right] \quad (67.5)$$

Multiplicando por (-1) a Eq. 67.6 e aplicando o logaritmo de potência, $-\log \varepsilon = \log \varepsilon^{-1}$ na Eq. 67.8

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(-\log\left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}\right) \leq \log \varepsilon \right) \cdot (-1) \right] \quad (67.6)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right) \leq -\log \varepsilon \right] \quad (67.7)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right) \leq \log \varepsilon^{-1} \right] \quad (67.8)$$

Calculando e evidenciando *log*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right) \leq \log \frac{1}{\varepsilon} \right] \quad (67.9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \quad (67.10)$$

Prosseguindo com o cálculo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left((\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right] \quad (67.11)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log \left(V^2 \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right) \right] \quad (67.12)$$

Na equação 67.13 ocorre a retirada do logaritmo de evidencia, a aplicação da propriedade da potência na Eq. 67.14 e a realização de divisão por 2 dentro do limite na Eq. 67.15.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log V^2 \leq \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right) \right] \quad (67.13)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 \log V \leq \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right) \right] \quad (67.14)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{2} \right) \cdot 2 \log V \leq \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right] \quad (67.15)$$

Nas equações abaixo ocorre a efetividade da divisão e a aplicação da propriedade do log da potência respectivamente.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log V \leq \frac{1}{2} \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right) \right] \quad (67.16)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\log V \leq \log \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (67.17)$$

O V se trata de uma constante positiva definida, pois o seu limite inferior é 0 (zero) quando $\alpha \geq 0$ e pode ser concluído que $\sigma^2 > 0$, se $\alpha > 1$ então, $\alpha - 1 > 0$. Devido a essas afirmativas será possível dizer que $\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} > 0$, portanto os valores de \log do lado direito são positivos, ou seja > 0 . Como $V > 0$, o resultado não poderá ser negativo, então $\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right)^{1/2} \geq 0$. O $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$, portanto:

$$V \leq \left((\infty - 1) \left(\frac{\sigma^2}{\alpha - 1} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (67.18)$$

Por ter no argumento o ∞ , podese concluir que o resultado será ∞ , então temos como resultado a Eq. 67.19.

$$V \leq \infty \quad (67.19)$$

Com os cálculos realizados dentro da Eq. 67 foi possível encontrar o limite superior referente à quando $\alpha \geq 1$. Nas equações 68 e 69 será possível visualizar as equações das médias dos momentos com seus limites respectivos, observe:

$$\alpha < 1 \rightarrow \langle V_1^n \rangle = A_1 \int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}} V^{n+1} \left[1 - (1-\alpha) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{1-\alpha} V dV \quad (68)$$

$$\alpha \geq 1 \rightarrow \langle V_2^n \rangle = A_2 \int_0^{\infty} V^{n+1} \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} V dV \quad (69)$$

Para resolver a integração da Eq. 68, que equivale ao ponto em que $\alpha < 1$ será aplicado a se a seguinte substituição de variável.

$$p = (1 - \alpha) \frac{V^2}{\sigma^2}; dp = \frac{2V}{\sigma^2} (1 - \alpha) dV; V dV = \frac{\sigma^2}{2(1 - \alpha)} dp; V = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \alpha}} \sqrt{p} \quad (70)$$

Substituindo

$$\langle V_1^n \rangle = A_1 \int \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \sqrt{p} \right)^{n+1} [1 - p]^{1/(1-\alpha)} \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} dp \quad (71)$$

Com a entrada de p na integração os limites vão mudar, para descobrir os novos limites será necessário utilizar o limite superior e inferior da Eq. 68, temos:

$$p_{inf} = (1 - \alpha) \frac{V_{inf}^2}{\sigma^2} \rightarrow p_{inf} = (1 - \alpha) \frac{0^2}{\sigma^2} \rightarrow p_{inf} = 0 \quad (72)$$

$$p_{sup} = (1 - \alpha) \frac{V_{sup}^2}{\sigma^2} \rightarrow p_{sup} = (1 - \alpha) \frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^2}{\sigma^2} \rightarrow p_{sup} = 1 \quad (73)$$

Então

$$\langle V_1^n \rangle = A_1 \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \sqrt{p} \right)^{n+1} [1-p]^{1/(1-\alpha)} \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} dp \quad (74)$$

Isolando as constantes.

$$\langle V_1^n \rangle = A_1 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} \int_0^1 p^{(n+1) \cdot 1/2} [1-p]^{1/(1-\alpha)} dp \quad (75)$$

O passo seguinte para resolver a integração irá ocorrer uma comparação com a função B_1 encontrada na Eq. 30, ao comparar temos:

$$\begin{aligned} t = p; z - 1 = \frac{1}{2} (n + 1) \rightarrow z = \frac{n + 1}{2} + 1 \rightarrow z = \frac{n + 3}{2}; \\ w - 1 = \frac{1}{1 - \alpha} \rightarrow w = \frac{1 + 1 - \alpha}{1 - \alpha} \rightarrow w = \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \end{aligned} \quad (76)$$

Os valores encontrados vão servir para serem aplicados na função gama encontrada na Eq. 77 abaixo.

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (77)$$

Com os resultados reunidos será possível preencher as informações que estavam faltando para completar a média dos momentos referente a $\alpha < 1$ na Eq. 68, é importante ressaltar que observe as equações 78 e 79.

$$\langle V_1^n \rangle = A_1 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha}} \right)^{n+1} \cdot \frac{\sigma^2}{2(1-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (78)$$

$$\langle V_1^n \rangle = A_1 \frac{\sigma^{n+3}}{2(\sqrt{1-\alpha})^{n+3}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (79)$$

Substituir a contratante A_1 pelo resultado obtido na Eq. 35, então:

$$\langle V_1^n \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sigma} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \cdot \frac{\sigma^{n+3}}{2(\sqrt{1-\alpha})^{n+3}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (80)$$

Calculando

$$\langle V_1^n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma^{n+3-3} \cdot (\sqrt{1-\alpha})^{3-(n+3)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (81)$$

$$\langle V_1^n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sigma^n}{(\sqrt{1-\alpha})^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (82)$$

O processo de calcular a média do momento para $\alpha < 1$ foi finalizado, contudo, o processo de calcular a média dos momentos continua, pois a última etapa será calcular a média dos momentos quando $\alpha \geq 1$, observe o procedimento equações seguintes.

$$\langle V_2^n \rangle = A_2 \int_0^\infty V^{n+1} \left[1 + (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} V dV \quad (83)$$

Para resolver esta integração foi utilizado o método da substituição de variável, como mostrado na Eq. 84.

$$q = (\alpha - 1) \frac{V^2}{\sigma^2}; dq = \frac{2V}{\sigma^2} (\alpha - 1) dV; V dV = \frac{\sigma^2}{2(\alpha - 1)} dq; V = \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \sqrt{q} \quad (84)$$

Substituindo e resolvendo

$$\int \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \sqrt{q} \right)^{n+1} [1 + q]^{-1/\alpha-1} \frac{\sigma^2}{2(\alpha - 1)} dq \quad (85)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha - 1}} \right)^{n+1} \frac{\sigma^2}{2(\alpha - 1)} \int q^{(n+1)/2} [1 + q]^{-1/\alpha-1} dq \quad (86)$$

$$\frac{\sigma^{n+1+2}}{2(\alpha - 1)^{(n+1) \cdot 1/2} \cdot (\alpha - 1)} \int q^{(n+1)/2} [1 + q]^{-1/\alpha-1} dq \quad (87)$$

$$\frac{\sigma^{n+3}}{2(\alpha - 1)^{(n+3)/2}} \int q^{(n+1)/2} [1 + q]^{-1/\alpha-1} dq \quad (88)$$

$$\frac{\sigma^{n+3}}{2(\sqrt{\alpha-1})^{(n+3)}} \int q^{(n+1)/2} [1+q]^{-1/\alpha-1} dq \quad (89)$$

O q entrou no cálculo, então será necessário encontrar o novo limite para a nova constante que se encontra e serão utilizados os limites anteriores mostrados na Eq. 83 de quando $\alpha \geq 1$, observe as equações 90 e 91.

$$q_{inf} = (\alpha - 1) \frac{V_{inf}^2}{\sigma^2} \rightarrow q_{inf} = (\alpha - 1) \frac{0^2}{\sigma^2} \rightarrow q_{inf} = 0 \quad (90)$$

$$q_{sup} = (\alpha - 1) \frac{V_{sup}^2}{\sigma^2} \rightarrow q_{sup} = (\alpha - 1) \frac{(\infty)^2}{\sigma^2} \rightarrow q_{sup} = \infty \quad (91)$$

Com os novos limites, temos:

$$\frac{\sigma^{n+3}}{2(\sqrt{\alpha-1})^{(n+3)}} \int_0^\infty q^{(n+1)/2} [1+q]^{-1/\alpha-1} dq \quad (92)$$

Nas equações 93 e 94 abaixo, são resultados de uma comparação da função B_2 que se encontra na Eq. 44 com a Eq. 92, observe o resultado.

$$\begin{aligned} t = q; z - 1 = \frac{n+1}{2} \rightarrow z = \frac{n+1}{2} + 1 \rightarrow z = \frac{n+3}{2}; -(z+w) = -\frac{1}{\alpha-1} \rightarrow \\ \rightarrow z+w = \frac{1}{\alpha-1}; w = \frac{1}{\alpha-1} - z \rightarrow w = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2} \end{aligned} \quad (93)$$

Após a comparação, na Eq. 94 ocorre a utilização dos resultados da equação 93.

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)} \quad (94)$$

Com todos os dados reunidos, temos:

$$\langle V_2^n \rangle = A_2 \cdot \frac{\sigma^{n+3}}{2(\sqrt{\alpha-1})^{(n+3)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)} \quad (95)$$

Na equação 96 abaixo ocorre a substituição da constante A_2 pelo resultado que se encontra na Eq. 49

$$\langle V_2^n \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sigma}\right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \cdot \frac{\sigma^{n+3}}{2(\sqrt{\alpha-1})^{(n+3)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)} \quad (96)$$

Resolvendo

$$\langle V_2^n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sigma} \right)^3 \cdot \frac{\sigma^{n+3}}{(\sqrt{\alpha-1})^{(n+3)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \quad (97)$$

Divisão de mesma base, conserva a base e subtrai os expoentes, então:

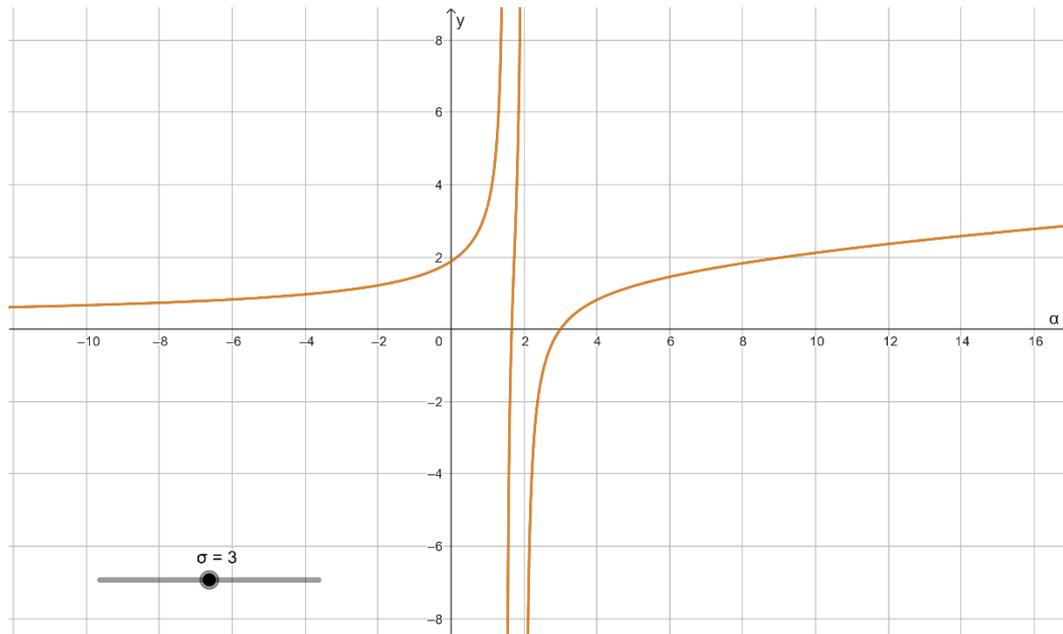
$$\langle V_2^n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (\sqrt{\alpha-1})^{3-(n+3)} \cdot \sigma^{n+3-3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \quad (98)$$

$$\langle V_2^n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sigma^n}{(\sqrt{\alpha-1})^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \quad (99)$$

Com os resultados das médias dos momentos referente a cada α específico, se torna possível a elaboração de gráficos que utilizam os resultados encontrados das equações 82 e 99 para melhor entendimento visual da média, desvio padrão, assimetria e curtose.

A Fig. 5 mostra o gráfico do primeiro momento da distribuição das velocidades de rotações estelares, em outras palavras $n = 1$ das Eq. 82 e 99. Este gráfico representa o comportamento da média com relação ao parâmetro α . A Fig.5 mostra os dois tipos de α estudados neste trabalho, ou seja, para $\alpha < 1$ e $\alpha \geq 1$ respectivamente. Uma vez que a velocidade de rotação estelar observada (i.e. velocidade rotacional medida) não é negativa por não ser possível identificar, a partir de valores medidos, para qual direção gira a superfície estelar, os valores negativos da média não devem ser considerados. Analisando o comportamento da Fig. 5, levando em conta as restrições para as medições de rotação estelar que são positivas, bem como a restrição de positividade do argumento da função gama, devido a função beta ser uma razão de função gama $\left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\right)$ que obedece o seguinte requisito, que $\Re\{z\} > 0$ e $\Re\{w\} > 0$, tendo assim valores só positivos é necessário apontar que de todas as três curvas presente no gráfico apenas a mais à esquerda é que deve ser considerada como válida para o comportamento da média rotacional por ser uma média positiva $y > 0$.

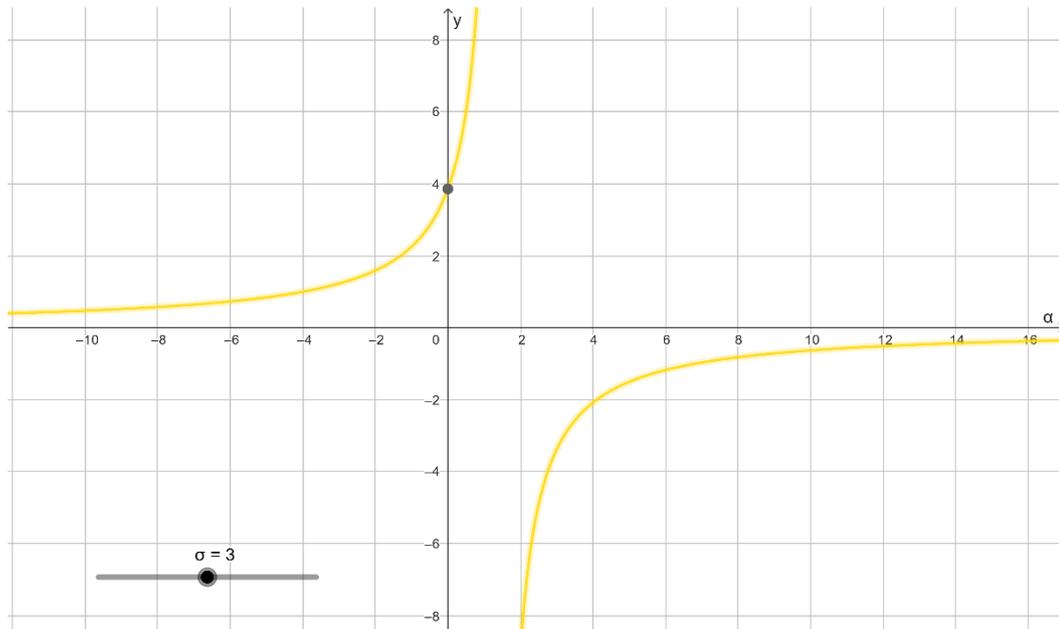
Figura 5 - Média



Fonte: Autor, 2023.

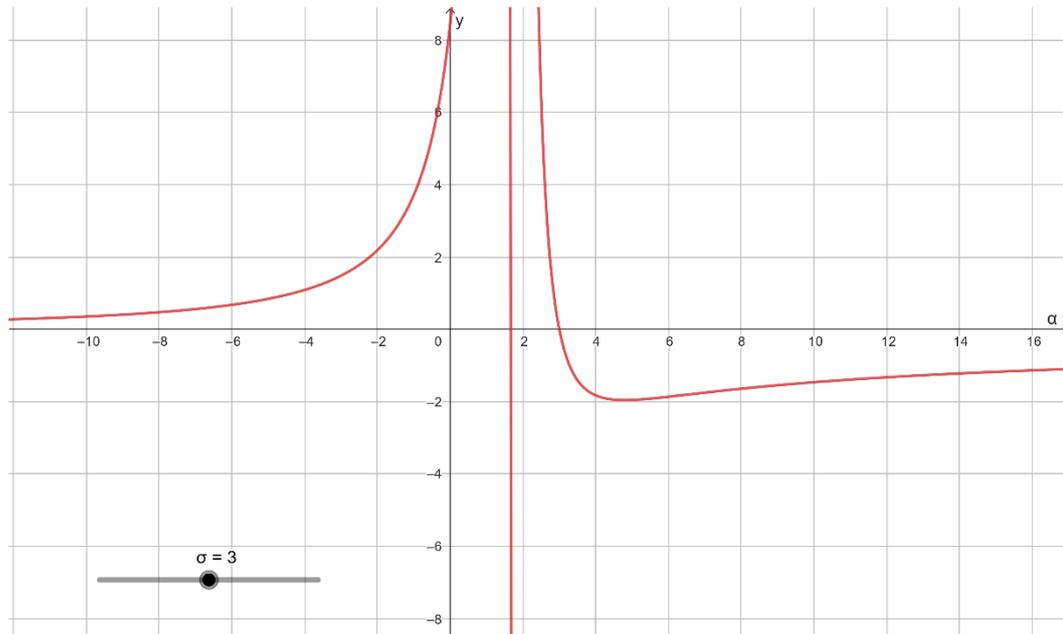
O gráfico do desvio padrão corresponde ao segundo momento ($n = 2$) das médias que pode ser observado na Fig. 6 possui tantos valores de y positivos como negativos, no entanto, os valores negativos não são válidos, pois as medições de rotação estelar são positivas. Analisando o gráfico é possível observar que quando $\alpha < 1$ o valor do y será positivo e o y corresponde ao desvio padrão, então os valores negativos que correspondem a $\alpha \geq 1$ não serão válidos por se tratar de um desvio padrão negativo que vai contra a restrição de positividade do argumento da função gama que obedece os requisitos que $\mathbb{R}\{z\} > 0$ e $\mathbb{R}\{w\} > 0$ e segue também que a rotação estelar não pode ser negativa por não saber o sentido da rotação.

Figura 6 - Desvio padrão



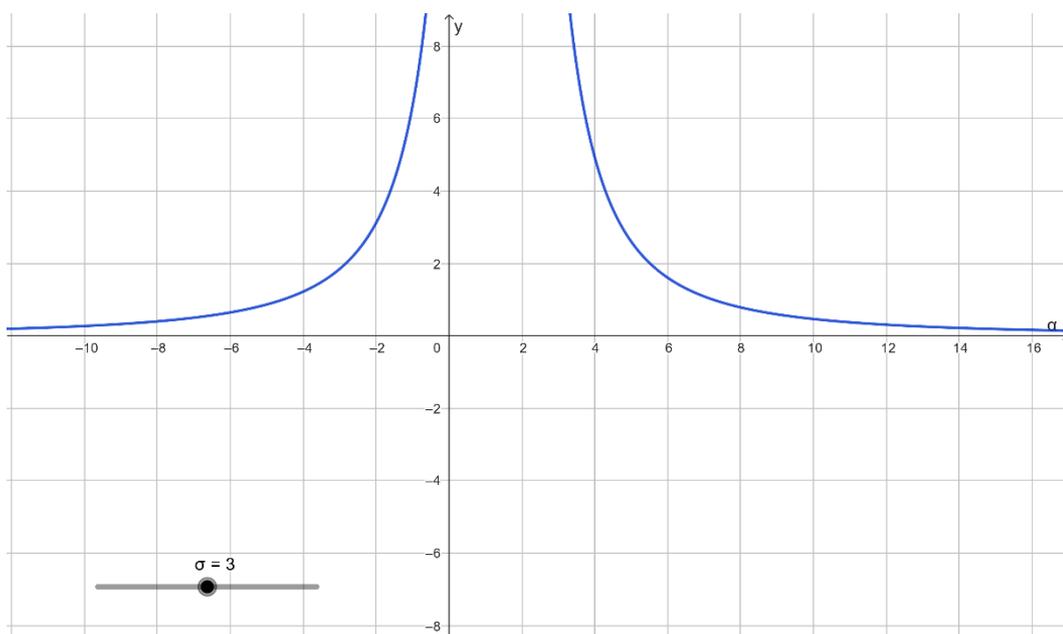
Fonte: Autor, 2023.

Na Fig. 7 é mostrado o quanto a distribuição é assimétrica quando eleva as médias dos momentos a 3, ou seja, quando o $n = 3$ da $\langle V_x^n \rangle$ (media dos momentos de V_1 ou V_2). A assimetria equivale ao terceiro momento da distribuição das velocidades de rotações estelares e à assimetria que foi feita para $\alpha < 1$ e $\alpha \geq 1$. Pode-se observar que os valores a serem válidos serão para quando o $\alpha < 1$, pois os valores do α são positivos e os que correspondem a $\alpha \geq 1$ não são válidos por se tratar de valores negativos do desvio padrão devido a função gama e a característica da velocidade de rotação estelar não ser negativa por não ter como saber a orientação da rotação, a assimetria corresponde ao y e os valores que são considerados quando $y > 0$.

Figura 7 - Assimetria

Fonte: Autor, 2023.

A Fig. 8 se refere a curtose, nota-se que as curvas azuis não chegam a ter curtose negativa, devido ao argumento da função gama. Uma vez que a velocidade de rotação estelar observada não é negativa por não ser possível identificar. Para obter o gráfico da curtose foi preciso considerar o n das Eq. 82 e 99 fosse 4, para mostrar o quanto a função é pontiaguda.

Figura 8 - Curtose

Fonte: Autor, 2023.

Por fim, terá como último passo o processo de derivação total dos momentos com relação ao tempo. Com os resultados obtidos das duas médias dos momentos será possível realizar a derivada implícita das médias dos momentos referente a cada α . Seguindo o material de Soares e Silva (2011) foi possível montar e conferir a Eq. D.1.1. nela ocorre o primeiro passo para ocorrer derivada implícita para quando $\alpha < 1$.

$$\frac{d}{dt} \langle V_1^n \rangle = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sigma^n}{(\sqrt{1-\alpha})^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right\} \quad (D.1.1)$$

Na Eq. D.1.2 ocorre a retirada das constantes e a continuação do cálculo na Eq. D.1.3.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma^n}{(\sqrt{1-\alpha})^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right] \right\} \quad (D.1.2)$$

$$\frac{2\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2}\right)}{(\sqrt{1-\alpha})^n \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right] \right\} \quad (D.1.3)$$

Na Eq. D.1.4 ocorre a derivação utilizando a derivada do quociente, que é usado quando existe uma divisão dentro da derivada, que funciona da seguinte maneira: $\frac{u'v - uv'}{v^2}$. O símbolo resumido da derivada é representado pelo ' (linha) acima da letra. Temos o $u = \sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2}\right)$, $u' = \frac{d(\sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2}\right))}{dt}$ e $v = \sqrt{1-\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)$, $v' = \frac{d((\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right))}{dt}$, realizando a substituição, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\left[\frac{d\left(\sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)\right)}{dt} \cdot \left((\sqrt{1-\alpha})^n \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right) \right]}{\left[(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^2} \right\} \\
& - \left\{ \frac{\left[\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right)\right) \cdot \frac{d\left((\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right)}{dt} \right]}{\left[(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^2} \right\} \quad (D.1.4)
\end{aligned}$$

É possível observar que existe dentro das derivadas uma multiplicação, então para solucionar essa derivada será preciso aplicar a derivada do produto, pode ser resumido em: $x' \cdot y + x \cdot y'$. É importante atentar ao detalhe que antes da subtração tem $\left((\sqrt{1-\alpha})^n \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right)$ que é igual a $\left[(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^2$ que se encontra no denominador, então a divisão a essa igualdade desses dois termos resulta o resultado será $\frac{1}{(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)}$, observe a Eq. D.1.5. Vale salientar que a derivada do gama pode ser realizada da seguinte maneira: $\frac{d\Gamma(j)}{dt} = \psi(j) + \Gamma(j) + \frac{\partial}{\partial l}(j) \frac{d}{dt}$.

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\left[n\sigma^{n-1} \frac{d\sigma}{dt} \cdot \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) + \sigma^n \cdot \psi\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \frac{d\alpha}{dt} \cdot 1 \right]}{\left(\sqrt{1-\alpha}\right)^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right\} \\
& - \frac{\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \right) \cdot \frac{n(1-\alpha)^{\frac{n-2}{2}} d\alpha}{2 dt} \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) +}{\left[(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^2} \quad (D.1.5) \\
& + \frac{\left(\sqrt{1-\alpha} \right)^n \cdot \psi\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{d\alpha}{dt}}{\left[(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^2} \left\}
\end{aligned}$$

Para que fiquem no mesmo denominador pode-se perceber que após o sinal de negativo o $\Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)$ fica presente duas vezes, esse mesmo caso ocorre juntamente com $(\sqrt{1-\alpha})^n$ que ao fazer algumas adaptações é possível notar que se encontra repetido após o negativo, então observe a Eq. D.1.6 que mostra o que foi colocado em evidência.

$$\begin{aligned} & \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\left[n \sigma^{n-1} \frac{d\sigma}{dt} \cdot \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) + \sigma^n \cdot \psi\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right]}{(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right. \\ & - \frac{\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \right) \left((\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \right) \cdot \frac{n}{2} (\sqrt{1-\alpha})^{-2} \frac{d\alpha}{dt} +}{\left[(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \right]^2} \\ & \left. + \psi\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right\} \end{aligned} \quad (D.1.6)$$

Ajustando na Eq. D.1.7:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\left[n \sigma^{n-1} \frac{d\sigma}{dt} \cdot \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) + \sigma^n \cdot \psi\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right]}{(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right. \\ & - \frac{\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \right) \cdot \frac{n}{2} (\sqrt{1-\alpha})^{-2} \frac{d\alpha}{dt} + \psi\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt}}{\left((\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \right)} \left. \right\} \end{aligned} \quad (D.1.7)$$

Evidenciando os elementos que estão sendo repetidos. por fim, temos como $\frac{d}{dt} \langle V_1^n \rangle$ a Eq. D.1.8:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\left[\sigma^n \right] \left[\Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \right] \cdot \left[n \sigma^{-1} \frac{d\sigma}{dt} + \psi\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right]}{(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right. \\ & - \frac{\left[\frac{d\alpha}{dt} \right] \left[\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \right) \cdot \frac{n}{2(\sqrt{1-\alpha})^2} + \psi\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \right]}{\left((\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \right)} \left. \right\} \end{aligned} \quad (D.1.8)$$

Realizando os cálculos necessários temos como $\frac{d}{dt} \langle V_1^n \rangle$ a Eq. D.1.9:

$$\frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \cdot \left[\frac{n}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \psi\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right]}{(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right. \\ \left. - \frac{\frac{d\alpha}{dt} \left[\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{7-5\alpha}{2-2\alpha}\right) \right) \cdot \frac{n}{2(\sqrt{1-\alpha})^2} + \psi\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) \right]}{(\sqrt{1-\alpha})^n \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2} + \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)} \right\} \quad (\text{D.1.9})$$

O passo seguinte será encontrar a derivada implícita da média dos momentos de $\langle V_2^n \rangle$ referente a $\alpha \geq 1$. Veja a Eq. D.2.1 que dará o ponto inicial.

$$\frac{d}{dt} \langle V_2^n \rangle = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sigma^n}{(\sqrt{\alpha-1})^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \right\} \quad (\text{D.2.1})$$

Retirando as constantes na Eq. D.2.2.

$$\frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \right] \right\} \quad (\text{D.2.2})$$

Na Eq. D.2.2 ocorre a derivação do quociente, pois existe uma divisão dentro da derivada, que funciona assim: $\frac{f'r - fr'}{v^2}$. Temos o $f = \sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)$, $f' = \frac{d\left(\sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)\right)}{dt}$ e $r = (\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)$, $r' = \frac{d\left((\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)\right)}{dt}$, substituindo, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\left[\frac{d\left(\sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)\right)}{dt} \cdot \left((\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)\right) \right]}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)\right]^2} \right\} \\
& - \left\{ \frac{\left[\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)\right) \cdot \frac{d\left((\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)\right)}{dt} \right]}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)\right]^2} \right\}
\end{aligned} \tag{D.2.3}$$

Na Eq. D.2.4 ocorre a utilização da derivada do produto, essa derivada ocorre quando há uma multiplicação dentro da derivada, então: $z' \cdot t + z \cdot t'$. Vale salientar que o expoente do denominador antes do negativo foi cancelado com a parte igual no numerador.

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\left[n\sigma^{n-1} \frac{d\sigma}{dt} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) + \sigma^n \right]}{\left(\sqrt{\alpha-1}\right)^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \right. \\
& \cdot \frac{\left[\psi\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right]}{\left(\sqrt{\alpha-1}\right)^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \\
& - \frac{\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \right) \cdot \frac{n(\alpha-1)^{\frac{n-2}{2}}}{2} \frac{d\alpha}{dt} \cdot \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)\right]^2} \\
& \left. + \frac{\left(\sqrt{\alpha-1}\right)^n \cdot \psi\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \frac{d\alpha}{dt}}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)\right]^2} \right\}
\end{aligned} \tag{D.2.4}$$

Para prosseguir, o método utilizado foi evidenciar o que está sendo repetido e realizar as derivadas parciais como pode ser visto na Eq. D.2.5

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[\frac{n \sigma^{n-1} \frac{d\sigma}{dt} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right)}{(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sigma^n \cdot \psi\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \left(-\frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt}}{(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \right] \right. \\
& \left. - \frac{\left((\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \right) \left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \right) \cdot \frac{n(\sqrt{\alpha-1})^{-2} \frac{d\alpha}{dt}}{2} + \right.} \\
& \left. \frac{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \right]^2}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \right]^2} \right\} \\
& + \frac{\psi\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \left(-\frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt}}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \right]^2} \left. \right\} \quad (D.2.5)
\end{aligned}$$

Resolvendo o denominador junto com o numerador que se encontra igual após o sinal negativo.

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{[\sigma^n] \left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \right] \left[n \sigma^{-1} \frac{d\sigma}{dt} \cdot \psi\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \left(-\frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right]}{(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \right. \\
& \left. - \frac{\left[\frac{d\alpha}{dt} \right] \left[\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \right) \cdot \frac{n}{2(\sqrt{\alpha-1})^2} + \psi\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \left(-\frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) \right]}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \right]} \right\} \quad (D.2.6)
\end{aligned}$$

Por fim, temos como $\frac{d}{dt} \langle V_2^n \rangle$ referente a $\alpha \geq 1$ na Eq. D.2.7.

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \left[\frac{n \frac{d\sigma}{dt}}{\sigma} \cdot \psi\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \left(-\frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} \right]}{(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right)} \right. \\
& \left. - \frac{\frac{d\alpha}{dt} \left[\left(\sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{n+3}{2}\right) \right) \cdot \frac{n}{2(\sqrt{\alpha-1})^2} + \psi\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \left(-\frac{1}{(\alpha-1)^2}\right) \right]}{\left[(\sqrt{\alpha-1})^n \Gamma\left(\frac{5-3\alpha}{2\alpha-2}\right) \right]} \right\} \quad (D.2.7)
\end{aligned}$$

Pode-se observar uma semelhança entre as equações D.1.9 e D.2.7 encontradas. Ambas as equações possuem as mesmas funções, no entanto, podemos ver que os argumentos dentro das funções Γ são diferentes, devido as

delimitações dos alfas feito no início do trabalho. As equações desejadas no trabalho são as D.1.9 e D.2.7, elas são resultados da derivação de $\langle V_1^n \rangle$ e $\langle V_2^n \rangle$ respectivamente.

O processo de derivação foi conduzido de forma implícita devido a relação entre as variáveis com o tempo para obter a função dependente do tempo (t). A função obtida é bem complexa, apresenta dependências nas novas funções que surgiram, são elas: a função Γ , Digama ($\psi(n, \alpha)$), apresenta dependência da função de sigma, gama, funções gamas de n , funções gamas de alfa, funções do parâmetro de sigma, e do parâmetro de alfa, além das variações temporais de sigma e de alpha.

Podemos pensar em resolver essas funções e pra isso precisamos saber como é o comportamento das funções alfas e sigmas, pois ainda não há nada com relação a isso, então é necessário se estudar as distribuições observadas das velocidades de rotação para verificar quais são esses parâmetros sigma e de alfa das observações para ver se tem algum comportamento temporal.

Como sigma se apresenta na distribuição como deve ta relacionado a largura da distribuição é bem possível que esse parâmetro sigma possa ser obtido observacionalmente (das medidas observacionais) assim como o perfil da distribuição (alpha-define o perfil) muda com o tempo, então é possível que haja uma correlação entre o alpha e o tempo da medida de uma estrela. Obtendo essas coisas é possível substitui-las para simplificar essa função

5 CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos neste trabalho, é possível concluir que a velocidade de rotação é um parâmetro fundamental para entender a evolução das estrelas. Embora existam muitos outros parâmetros físicos que influenciam essa evolução, o estudo da rotação estelar revelou-se uma abordagem promissora para compreender melhor como as estrelas se formam e evoluem ao longo do tempo. Embora haja espaço para aprimoramento dos resultados, os parâmetros livres em uma função de distribuição teórica são sempre bem-vindos para ajustar com maior precisão as curvas de frequência dos dados observacionais. Isso sugere que o tratamento probabilístico do parâmetro de velocidade de rotação pode ser uma ferramenta valiosa para estudos futuros da evolução estelar.

Este trabalho foi desenvolvido com base na equação Maxwelliana, que desempenhou um papel fundamental em todo o processo. Para avançar na pesquisa, foi necessário desmembrar cada etapa da equação e resolver separadamente. O primeiro passo foi determinar a constante de normalização, seguido da média dos momentos e, por fim, a aplicação da média dos momentos no processo de uma derivada implícita, cada processo desse foram realizados duas vezes devido a condição de $\alpha < 1$ e $\alpha \geq 1$ exigidos. Ao longo do desenvolvimento, a equação Maxwelliana serviu como a principal referência e guia para cada passo dado na pesquisa.

O processo de encontrar a constante de normalização foi feito realizando uma comparação com as funções variadas da função beta, esse mesmo processo se repete ao ser calculado as médias dos momentos. Antes desses processos de comparação foram calculados os valores máximos e mínimos da integração para poder ser realizada a comparação.

Quando se obteve a média dos momentos foi possível elaborar e analisar os comportamentos dos gráficos referente a média, ao desvio padrão, a assimetria e a curtose denominando o n de $\langle V_1^n \rangle$ e $\langle V_2^n \rangle$.

Com os resultados dos cálculos das médias foi possível realizar o último passo do objetivo do trabalho que seria derivação implícita com relação ao tempo para chegar na equação teórica da variação temporal dos momentos que podem ser vistas nas equações D1.9 e D.2.7. Nessas derivadas temporais foi observado que surgem

novas funções de Γ , com a derivada de Γ surge a função Digama ($\psi(x)$) e nas derivadas também mostrou dependência do parâmetro σ e α com relação ao tempo. E apresenta como função dos parâmetros sigma e alfa além das variações temporais de sigma e de alfa.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Dácio Alves de. **Dinâmica de rotação para o ensino médio com o uso de experimento de baixo custo**. 2015. Disponível em <https://mnpes.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/94/2017/02/MNPEF-UFERSA_D%C3%A1cio-dez2015.pdf>. Acesso em 18 dez. 2022, 20:00.

BERNARDINO, Jandson Wendel da Silva. **Um estudo sobre eclipses para o ensino de física no ensino médio**: um diálogo entre o conceitual e o uso das tecnologias. 2016. Disponível em: <<https://memoria.ifrn.edu.br/bitstream/handle/1044/944/JANDSON%20-%20Monografia%20-%20Final.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em 15 dez. 2022, 11:27.

ESA/NASA/Hubble. **Nebulosa da Águia**. Disponível em <<https://ultimosegundo.ig.com.br/colunas/astronoticias/2019-03-08/nascimento-estrelas-no-universo.html>>. Acesso em 27 mar 2023, 1:18.

FEYNMAN, Richard P. ; LEIGHTON, Robert B. ; SANDS, Matthew. **Lições de física de Feynman**. 4 vols. São Paulo/SP: Editora Bookman Companhia Ltda, 2008.

GARCIA, João F. F. Rodrigues; MORENO, Maiara F.; SUMI, Otávio Massola. **Efeito Doppler**. 2013. Disponível em <<https://www.ifsc.usp.br/~strontium/Teaching/Material2013-2%20FCM0102%20Fisica%20II-EESC/Exercicio%20T15.73.pdf>>. Acesso em 19 set.2022, 9:00.

GIL, Antônio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4 ed. São Paulo/SP: Editora Atlas, 2002.

IRWIN, Jonathan; BOUVIER, Jerome. **The Ages of Stars** (The rotational evolution of low-mass stars). *In*: PROCEEDINGS IAU SYMPOSIUM, 258., 2008, International Astronomical Union.

KARTTUNEN, Hannu; KRÖGER, Pekka; OJA, Heikki; POUTANEN, Markku; DONNER, Karl Johan. **Fundamental astronomy**. 6. ed. New York: Springer, 2017.

KLINE, Morris. **Mathematics: the lof certainty**. 1. ed. New York: Fall River Press Edition, 1980.

LACH, Donna. **Cometa NEOWISE visto em um céu cheio de Aurora**. 2020. Disponível em <<https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/2020/comet-neowise-seen-in-an-aurora-filled-sky>>. Acesso em: 26 mar. 2023.

LANG, Kenneth R. **Essential astrophysics**. Medford, MA: Springer, 2012.

LARSON, Ron; FARBER, Besty. **Estatística aplicada**. 6. ed. São Paulo: 2015, p.3. Acesso em: 18 jan. 2023.

LEVENHAGEN, R. S.; KÜNZEL, R. A rotação estelar e seu efeito sobre os espectros. In: **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Santa Maria/RS: Editora Centro Universitário Franciscano, Número 4,4701, Fevereiro, 2009.

MACIEL, Saulo Carneiro. **Uma análise teórica da evolução da rotação estelar**. Publicado em 10/2007. Disponível em <<https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16525/1/SauloCM.pdf>>. Acesso em 12 set.2022, 21:10.

MACIEL, Walter J.. **O futuro do Sol**. Publicado em 1995. Disponível em <<http://www.astro.iag.usp.br/~maciel/teaching/artigos/futuro/futuro.html>>. Acesso em 21 set.2022, 20:00.

NASA. **As várias camadas do Sol**. 2012. Disponível em <http://www.ccvalg.pt/astronomia/sistema_solar/sol/sol_camadas.gif>. Acesso em 10 nov. 2022, 22:00.

NASA/Goddard. **Anatomia do Sol**. 2013. <[Solhttps://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/science/solar-anatomy.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/science/solar-anatomy.html)> Acesso em 16 nov. 2022, 10:30.

NASA. **Aurora: iluminando a conexão Sol-Terra**. 2021. Disponível em: <<https://www.nasa.gov/aurora>>. Acesso em 25 mar 2023, 16:00.

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza Oliveira Filho; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. 1. ed. **Astronomia e astrofísica**. Porto Alegre/RS: Editora da Universidade, 2000.

OLIVEIRA, Luciano Luiz Alencar de. **A rotação estelar revelada pela modulação fotométrica**. 2019. 91 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Departamento de Física Teórica e Experimental, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Ufrn, Natal-Rn, 2020. Disponível em: <file:///C:/Users/Usuario/Downloads/Rotacaoestelarrevelada_Oliveira_2019.pdf> Acesso em: 04 set. 2022, 8:45.

ROSS, S. 8. Ed. **A First Course in Probability**. Publicado em: 2010. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

SERWAY, Raymond A.; JEWETT, John W. J. 5° ed. **Mecânica clássica e relatividade**. São Paulo/SP: Editora Cengage Learning, 2014. Acesso em: 19 dez. 2022, 18:00.

SOARES, Bráulio Batista. **Função de distribuição generalizada aplicada à velocidade de rotação estelar**. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16548>>. Acesso 14 jul. 2022, 15:00.

SOARES, Bráulio Batista. **Um estudo da rotação em estrelas da seqüência principal**. 2000. Disponível em <<https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16630>> Acesso em: 05 out. 2021, 15:00.

SOARES, B. B.; SILVA, J. R. P. **Moments of the generalized distribution for stellar rotation rates**. Publicado em 01/2013. Disponível no site <<https://epljournal.edpsciences.org/articles/epl/abs/2013/02/epl15170/epl15170.html>>. Acesso em 14 jul.2022, 14:00.

SOARES, B. B.; SILVA, J. R. P. **On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context**. Publicado em 12/09. Disponível no site <<https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/96/19001>>. Acesso em 14 jul. 2022, 16:25.

TASSOUL, Jean-Louis. **Stellar rotation**. Cambridge: Cambridge University, 2003.

TASSOUL, Jean-Louis. **Theory of rotating stars**. New Jersey: Princeton University Press, 1998.

VILAS-BOAS, José Williams. Formação de estrelas. In: MILONE, André de Castro et al. **Introdução à astronomia e astrofísica**. São José dos Campos/SP: INPE, 2009. Disponível em: <http://www.inpe.br/ciaa2018/arquivos/pdfs/apostila_completa_2018.pdf> Acesso em 05 jun.2022.